

۱- فرض کنید $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ ، $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$ و میدان برداری F با ضابطه‌ی $F = (xz)\mathbf{i} + (3yz + x^2)\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ داده شده باشد.

الف) با تعیین اکسترمم‌های تابع f روی ناحیه‌ی D ، نشان دهید که برای هر $(x, y) \in D$ ، $f(x, y) \geq 0$.
 ب) مطلوبست تعیین مقدار عبارت $\iint_D x \, dx \, dy$.

ج) اگر C خم حاصل از تلاقی رویه به معادله‌ی $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ با استوانه‌ی به معادله‌ی $x^2 + y^2 = 2y$ و با جهت حرکت مثبت (نسبت به نرمال خارجی کره) باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C F \cdot dr$.
 (۲۲ نمره)

حل. الف) (۸ نمره) ابتدا نقاط بحرانی f بر \mathbb{R}^2 را به دست می‌آوریم. با توجه به مشتق‌پذیری این تابع، نقاط بحرانی آن جواب‌های معادلات $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ هستند.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases}$$

به این ترتیب نقطه‌ی $(0, 0)$ تنها نقطه‌ی بحرانی این تابع بر \mathbb{R}^2 است که روی مرز ناحیه‌ی D قرار دارد. پس این تابع درون D هیچ نقطه‌ی بحرانی ندارد. اکنون اکسترمم‌های f روی مرز (یا تحت شرط $g(x, y) := x^2 + y^2 - 2y = 0$) را به دست می‌آوریم. با استفاده از روش لاگرانژ، نقاط مورد نظر جواب‌های معادلات زیر است.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda(y - 1) \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

تنها جواب‌های این معادلات نقاط $(0, 0)$ و $(0, 2)$ هستند. با مقایسه‌ی مقادیر تابع f در این نقاط

$$\min_D f = f(0, 2) = 0, \quad \max_D f = f(0, 0) = 4$$

در نتیجه

$$\forall (x, y) \in D, \quad 0 = \min_D f \leq f(x, y) \leq \max_D f = 4$$

ب) (۵ نمره) با استفاده از تغییر متغیر قطبی،

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dx \, dy &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} r \cos \theta r \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \cos \theta \left. \frac{1}{3} r^3 \right|_0^{2 \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{8}{12} \sin^4 \theta \Big|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

ج) (۹ نمره) فرض کنیم S قسمتی از نیم کره $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ محصور توسط استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 2y$ باشد. بنابر قضیه‌ی استوکس

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{curl} F \cdot n \, d\sigma$$

که در آن $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(xi + yj + zk)$ بردار قائم یکه بر S روبه سمت خارج است. داریم

$$\text{curl}F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 3yz + x^2 & y^2 \end{pmatrix} = (-y)i + xj + 2xk$$

در نتیجه

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S xz \, d\sigma$$

فرض کنیم D ناحیه‌ی محصور توسط دایره‌ی $x^2 + y^2 = 2y$ باشد. با توجه به اینکه S قسمتی از رویه به معادله‌ی $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ با شرط $(x, y) \in D$ است، خواهیم داشت

$$\int_C F \cdot dr = \iint_D x \sqrt{4 - x^2 - y^2} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \iint_D x \, dx dy$$

بنابر قسمت قبل، حاصل این انتگرال برابر صفر است.

۲- فرض کنید D ناحیه‌ی محصور توسط خم بسته‌ی $|x| + |y| = 1$ باشد (مطابق شکل زیر)

الف) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_D (x^2 - y^2) \, dx dy$.

ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C (y^2 + x^2 - y) dx + (x^2 + y^2) dy$ که در آن C خم بسته‌ی $|x| + |y| = 1$ و جهت حرکت بر روی آن جهت مثبت باشد. (۱۴ نمره)

حل الف) (۷ نمره) با معرفی متغیرهای جدید u و v به صورت $u = x + y$ و $v = x - y$ ، و یا $x = \frac{1}{2}(u + v)$ و $y = \frac{1}{2}(u - v)$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}$$

و از آنجا

$$\iint_D (x^2 - y^2) \, dx dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 uv \, du dv = 0$$

ب) (۷ نمره) با استفاده از قضیه‌ی گرین،

$$\begin{aligned} \int_C (y^2 + x^2 - y) dx + (x^2 + y^2) dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (2x^2 - 2y^2 + 1) dx dy \\ &= 2 \iint_D (x^2 - y^2) dx dy + \iint_D dx dy \\ &= 0 + A \end{aligned}$$

که در آن A ، مساحت ناحیه‌ی D ، برابر ۲ است.

۳- فرض کنید $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، S_1 قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ بالای صفحه‌ی $z = 1$ و S_2 قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ زیر این صفحه باشد. همچنین فرض کنید T ناحیه‌ی محصور توسط $S_1 \cup S_2$ است.

(الف) مطلوبست محاسبه‌ی حجم ناحیه‌ی T .

(ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ که در آن \mathbf{n} بردار نرمال بر S_1 رو به سمت خارج کره است.

(ج) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ که در آن \mathbf{n} بردار نرمال بر S_2 رو به سمت پایین است. (۲۴ نمره)

حل. (الف) (۶ نمره) با بردن به دستگاه مختصات کروی، خواهیم داشت

$$T = \{(\rho, \phi, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}\}$$

پس

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi \, d\phi \right) \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \, d\rho \right) \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} (\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

(ب) (۱۰ نمره) تصویر S_1 بر صفحه‌ی xoy ناحیه‌ی $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ است. با توجه به اینکه بر این ناحیه $z = f(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ داریم

$$N = \frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad n = \frac{N}{\|N\|}, \quad d\sigma = \|N\| \, dx dy$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \frac{N}{\|N\|} \|N\| \, dx dy = \iint_R \mathbf{F} \cdot N \, dx dy \\ &= \iint_R \left(\frac{x^2}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right) \, dx dy \\ &= \iint_R \frac{2}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} \, dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{2 - r^2}} \, dr d\theta = 4\pi(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

(ج) (۸ نمره)

روش اول. اگر $S := S_1 \cup S_2$ آنگاه با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس و توجه به اینکه $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$ ، با استفاده از قسمت (الف) خواهیم داشت

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = 3 \iiint_T dV = 3 \frac{4\pi}{3} (\sqrt{2} - 1) = 4\pi(\sqrt{2} - 1)$$

به این ترتیب، با استفاده از قسمت (ب)،

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 4\pi(\sqrt{2} - 1) - 4\pi(\sqrt{2} - 1) = 0$$

روش دوم. تصویر S_2 بر صفحه‌ی xoy همان ناحیه‌ی R است. با توجه به اینکه برای این رویه داریم $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$N = \frac{\partial z}{\partial x}i + \frac{\partial z}{\partial y}j - k = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}i + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}j - k$$

در نتیجه، بر روی این رویه

$$F \cdot N = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

به این ترتیب،

$$\iint_{S_2} F \cdot n d\sigma = \iint_R F \cdot \frac{N}{\|N\|} \|N\| dx dy = 0$$
