باسمه تعالی

پاسخ سوالات امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۲

نیمسال اول ۹۵-۹۴

۱. فرض کنید $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$. با ذکر دلیل، اکسترمم‌های نسبی و مطلق و نقاط زینی تابع $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 1$ را بر روی ناحیه بسته و کراندار R تعیین نمائید. (۱۲ نمره)

پاسخ سوال ۱. ابتدا با حل معادله $\nabla f = 0$ نقاط بحرانی درون ناحیه را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \quad \Rightarrow (x,y) = (1,0).$$

با توجه به آزمون مشتق دوم، نقطه $(1,0)$ یک نقطه زینی است و تابع در این ناحیه اکسترمم نسبی ندارد.

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Rightarrow AB - C^2 = -4 < 0.$$

حال اکسترمم‌های روی مرز را بدست می‌آوریم.

راه اول. قرار می‌دهیم $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$ و اکسترمم‌های f تحت قید $g(x,y) = 0$ را با روش لاگرانژ بدست می‌آوریم. باید معادله $\nabla f - \lambda \nabla g = 0$ را حل کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 2 - 2\lambda x = 0, \tag{1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = -2y - 8\lambda y = 0, \tag{2}$$
$$x^2 + 4y^2 = 4. \tag{3}$$

$$(2) \rightarrow \begin{cases} y = 0 \xrightarrow{(3)} x = \pm 2. \\ \lambda = -\frac{1}{4} \xrightarrow{(1)} x = \frac{4}{5} \xrightarrow{(3)} y = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}. \end{cases}$$

بنابراین نقاط $(\pm 2, 0)$ و $(\frac{4}{5}, \pm\frac{\sqrt{21}}{5})$ بدست می‌آید.

(x,y)	$f(x,y)$	
$(1,0)$	0	
$(2,0)$	1	
$(-2,0)$	9	ماکسیمم مطلق
$(\frac{4}{5}, \pm\frac{\sqrt{21}}{5})$	$\frac{-4}{5}$	می‌نیمم مطلق

(۴)

راه دوم. خم مرز $x^2 + 4y^2 = 4$ را بصورت زیر پارامتری می‌کنیم.

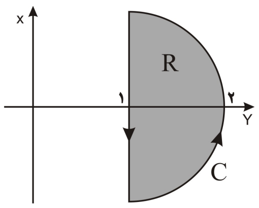
$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

حال اکسترم تابع زیر را پیدا می‌کنیم.

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = 4\cos^2 t - \sin^2 t - 4\cos t + 1 = 5\cos^2 t - 4\cos t.$$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow -10\sin t\cos t + 4\sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \text{ یا } \cos t = \frac{2}{5}.$$

$$\Rightarrow (x, y) = (\pm 2, 0),\ (\frac{4}{5}, \pm\frac{\sqrt{21}}{5}).$$



۰۲. فرض کنید ناحیه‌ی بسته و کران‌دار R در صفحه محدود به خط $x = 1$ و نیم‌دایره به معادله‌ی $(x^2 + y^2 - 2x = 0, x \geq 1)$ و C مرز آن (در جهت مثلثاتی) باشد. (مطابق شکل)

الف) مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال دوگانه $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$.

(راهنمایی: معادله‌ی خط $x = 1$ در دستگاه قطبی به صورت $r = \frac{1}{\cos\theta}$ است.) (۹ نمره)

ب) با فرض $\mathbf{F}(x, y) = x\ln(x^2 + y^2)\,\mathbf{i} + (y + 1)\ln(x^2 + y^2)\,\mathbf{j}$، مطلوبست تعیین $\int_C \mathbf{F}.dr$. (۷ نمره)

پاسخ سوال ۲. الف) معادله دایره در دستگاه قطبی برابر $r = 2\cos\theta$ است. هم‌چنین محل تقاطع خط $x = 1$ و دایره برابر است با

$$2\cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}.$$

بنابراین ناحیه R در دستگاه قطبی بصورت زیر توصیف می‌شود.

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\quad \frac{1}{\cos\theta} \leq r \leq 2\cos\theta.$$

لذا

$$\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} \frac{r\cos\theta}{r^2} r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2\theta - 1)\, d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

پاسخ سوال ۲. ب) راه اول. چون $\mathbf{F}$ در ناحیه R دارای مشتقات جزیی پیوسته و C یک خم بسته ساده است، می‌توان از قضیه گرین استفاده کرد.

$$\int_C \mathbf{F}.dr = \iint_R (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy = \iint_R \frac{2x(y+1)}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$
$$= 2\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = 2.$$

که تساوی آخر بدلیل قسمت الف است.

راه دوم. فرض کنید C_1 خم نیم‌دایره و C_2 خط راست باشد. معادله پارامتری نیم‌دایره بصورت زیر است.

$$x = 1 + \cos t,\quad y = \sin t,\quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \mathbf{F}.dr &= \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos t)\ln(2+2\cos t)(-\sin t) + (1+\sin t)\ln(2+2\cos t)\cos t\,dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \sin t)\ln(2+2\cos t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \ln(2+2\cos t)dt \\
&\overset{\text{جزء به جزء}}{=} \sin t \ln(2+2\cos t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin^2 t}{2+2\cos t}\,dt \\
&= 2\ln 2 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - 1)\,dt = 2\ln 2 - 2 + \pi.
\end{aligned}$$

هم‌چنین معادله پارامتری خط راست به‌صورت زیر است.

$$x = 1, \quad y = -t, \quad -1 \le t \le 1.$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \mathbf{F}.dr &= \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_{-1}^{1} (t-1)\ln(1+t^2)\,dt = -\int_{-1}^{1} \ln(1+t^2)\,dt \\
&\overset{\text{جزء به جزء}}{=} -t\ln(1+t^2)\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = -2\ln 2 + \int_{-1}^{1} (2 - \frac{2}{1+t^2})\,dt \\
&= -2\ln 2 + 4 - 2\tan^{-1} t\Big]_{-1}^{1} = -2\ln 2 + 4 - \pi.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_C \mathbf{F}.dr = \int_{C_1} \mathbf{F}.dr + \int_{C_2} \mathbf{F}.dr = 2\ln 2 - 2 + \pi - 2\ln 2 + 4 - \pi = 2.$$

---

۳. فرض کنید R در صفحه ناحیه‌ی مربع شکلی باشد که محدود به خطوط با معادلات $x+y=1$ و $x+y=-1$ و $x-y=1$ و $x-y=-1$ است. یعنی رئوس آن نقاط $A=(1,0)$ و $B=(0,1)$ و $C=(-1,0)$ و $D=(0,-1)$ باشند.

الف) مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال دوگانه $\iint_R (x-y)\cos(x^2-y^2)\,dx\,dy$. (۹ نمره)

ب) مکعب مستطیلی را در نظر بگیرید که قاعده‌ی آن R و یال‌هایش موازی محور zها هستند. اگر خم C محل تلاقی سطح جانبی این مکعب مستطیل با نیم‌کره به معادله‌ی $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ باشد (C در جهت مثبت)، مطلوبست تعیین $\int_C \mathbf{F}.dr$ که در آن $\mathbf{F}(x,y,z) = (x-\sin(x^2-y^2))\,\mathbf{i} + \sin(x^2-y^2)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. (۸ نمره)

پاسخ سوال ۳. الف) با تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=x-y$ داریم $x=(u+v)/2$ و $y=(u-v)/2$ و

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}.$$

همچنین ناحیه R بصورت $(-1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1)$ توصیف می‌شود. بنابراین

$$\iint_R (x-y)\cos(x^2-y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} v\cos(uv)\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin(uv)\Big]_{-1}^{1} dv$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2\sin v\,dv = -\cos v\Big]_{-1}^{1} = 0.$$

پاسخ سوال ۳. ب) اگر S رویه کره به معادله $z = g(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ باشد، با استفاده از قضیه استوکس داریم

$$\int_C \mathbf{F}.dr = \iint_S \operatorname{Curl}\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma.$$

اما

$$\operatorname{Curl}\mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-\sin(x^2-y^2) & \sin(x^2-y^2) & z \end{pmatrix} = 2(x-y)\cos(x^2-y^2)\mathbf{k}.$$

همچنین

$$\mathbf{n} = \frac{(2x,2y,2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{2}(x,y,z) = \frac{1}{2}(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2}).$$

و

$$\operatorname{Curl}\mathbf{F}.\mathbf{n} = (x-y)\cos(x^2-y^2)\sqrt{4-x^2-y^2}.$$

به علاوه

$$d\sigma = \sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

بنابراین

$$\iint_S \operatorname{Curl}\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_R 2(x-y)\cos(x^2-y^2)\,dx\,dy = 0.$$

که تساوی آخر بدلیل قسمت الف است.

---

۴. الف) حجم ناحیه T در فضا محصور به دو مخروط به معادلات $z = \sqrt{x^2+y^2}$ و $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$ و کره‌های به معادلات $x^2+y^2+z^2 = 1$ و $x^2+y^2+z^2 = 4$ را بیابید. (۸ نمره)

ب) اگر $\mathbf{F} = (2x+yz^2)\,\mathbf{i} + (y-5x^3z)\,\mathbf{j} + (x+y+z)\,\mathbf{k}$ و S رویه‌ی محصور کننده‌ی ناحیه‌ی T در (الف) باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma$.

پاسخ سوال ۴. الف) معادله دو مخروط در دستگاه کروی به‌صورت $\tan\phi = 1$ و $\tan\phi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و معادله دو کره در دستگاه کروی به صورت $\rho = 1$ و $\rho = 2$ است. بنابراین ناحیه T در دستگاه کروی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad \frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{\pi}{4}, \quad 1 \le \rho \le 2.$$

لذا با استفاده از تغییر متغیر کروی داریم

$$\text{حجم} T = \iiint_T dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{8}{3} - \frac{1}{3}) \sin\phi \, d\phi \, d\theta = 2\pi \frac{7}{3} (\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}) = \frac{7\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3}.$$

پاسخ سوال ۴. ب) چون $\mathbf{F}$ درون T دارای مشتقات جزیی پیوسته است، طبق قضیه دیورژانس داریم

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx\,dy\,dz.$$

اما

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2 + 1 + 1 = 4.$$

بنابراین

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T 4 \, dx\,dy\,dz = 4 \times \text{حجم}\ T = \frac{28\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3}.$$

تساوی آخر بدلیل قسمت الف است. (۷ نمره)

موفق باشید