

اگر $f : D_f \subseteq R^n \rightarrow R$ یک تابع چند متغیره باشد آنگاه نمودار f مجموعه نقاطی در R^{n+1} به صورت

$$G(f) = \{(X, f(x)), X \in D_f\}$$

می باشد.

از آنجایی که فضای واقعی سه بعدی می باشد پس $n+1$ حداکثر می تواند ۳ باشد. لذا ما فقط راجع به نمودار یک تابع دو متغیره می توانیم بحث کنیم.

اگر $f : D_f \subseteq R^2 \rightarrow R$ یک تابع دو متغیره باشد آنگاه نمودار f مجموعه ی نقاط $G(f) = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D_f\}$ در R^3 است.

تعریف: اگر $f : D_f \subseteq R^2 \rightarrow R$ پیوسته باشد، آنگاه نمودار f یک رویه یا یک سطح مشخص شده توسط $Z = f(x, y)$ نامیده می شود و به S نشان می دهیم.

تذکر: ممکن است سطح S توسط معادله ضمنی $F(x, y, z) = C$ مشخص شود.

برای بررسی نمودار یک تابع دو متغیره سه گروه اصلی را معرفی و نهایتاً دستورالعمل رسم نمودار یک تابع دو متغیره در حالت کلی را مطرح می کنیم.

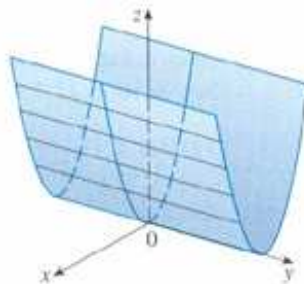
سه گروه اصلی عبارتند از

- ۱- استوانه ها
- ۲- سطوح دوار
- ۳- سطوح درجه دو

۱- استوانه ها:

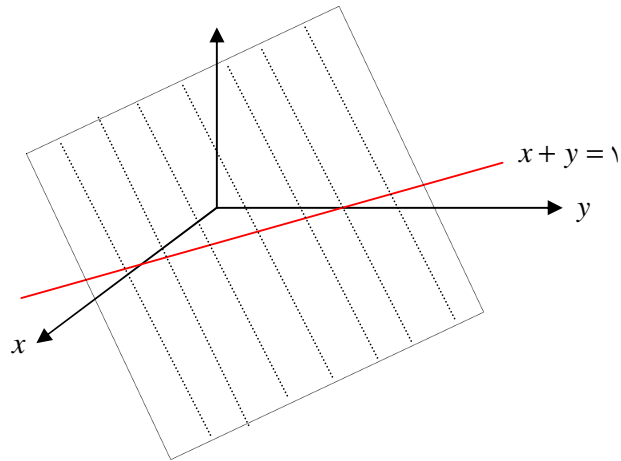
یک استوانه، سطح تولید شده توسط حرکت یک خط روی یک منحنی در صفحه به موازات یک خط ثابت است. منحنی را قاعده استوانه و خط ثابت را محور استوانه می نامیم.

مثال ۱: استوانه ای که قاعده آن منحنی $Z = x^2$ در صفحه x^2 و محور آن، محور y ها می باشد در شکل



مشخص شده است.

مثال ۲: معادله $x + y = 1$ در صفحه xy یک خط را نمایش می دهد در حالی که این معادله در فضای xyz مشخص کننده یک صفحه است. در حقیقت این صفحه استوانه ای است که قاعده آن خط $x + y = 1$ و محور آن، محور z ها است.

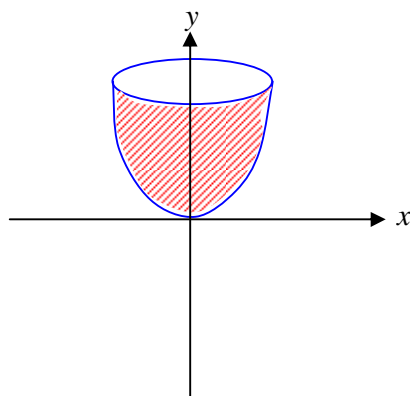


چگونه تشخیص دهیم یک معادله در فضای R^3 یک استوانه را مشخص می کند. اگر در یک معادله دو متغیر ظاهر شود، آنگاه معادله در صفحه ی متغیرهای ظاهر شده یک منحنی ولی در فضای R^3 یک استوانه است که قاعده آن منحنی مربوط به معادله و محور آن، محور مربوط به متغیر ظاهر نشده در معادله است.

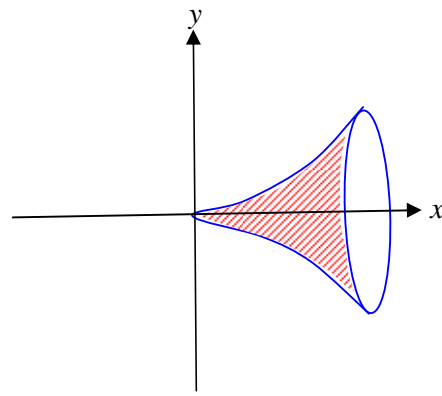
مثال: $x = \sin z$ یک استوانه در R^3 به موازات محور y ها است.

سطوح دوار:

تعریف: یک سطح دوار، سطح حاصل از دوران یک منحنی حول محور مربوط به یکی از متغیرهای ظاهر شده در معادله ی آن منحنی می باشد.



دوران حول محور y ها (الف)



دوران حول محور x ها (ب)

سطوح فوق حاصل دوران منحنی $y = x^2$ حول محور y ها و حول محور x ها حاصل می شود.

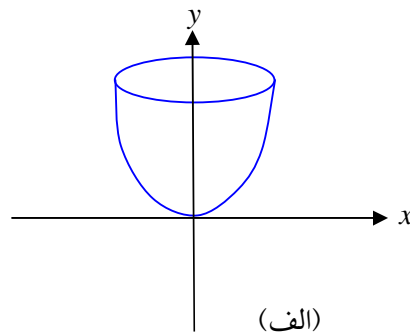
• در حالت کلی می توان سطح دوار را توسط دوران یک منحنی حول هر خط که در صفحه ی

آن قرار دارد تولید کرد.

برای نوشتن معادله ی یک سطح دوار در R^3 : توان ۲ متغیری که دوران حول آن انجام نمی شود را به دست می

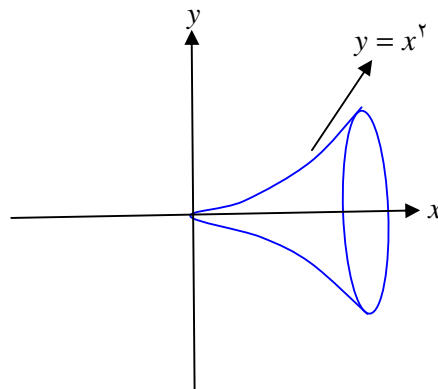
آوریم و به جای آن خودش به علاوه توان ۲ متغیر ظاهر نشده در معادله را قرار می دهیم.

مثلاً در شکل الف:



$$y = x^2 + z^2$$

و در شکل (ب)



$$x^2 = y^2 + z^2$$

است.

دوران حول محور x ها (ب)

سطح درجه ۲ :

تعریف: یک سطح درجه ۲ نمودار یک معادله درجه ۲ شامل سه متغیر x, y, z و می باشد. فرم کلی چنین

معادله ای به صورت

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1)$$

است که در آن A, B, C, \dots, J اعداد ثابت می باشند.

با استفاده از ماتریسهای دوران جملات xz, xy و yz را حذف نموده و فرم

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + ex + f y + g z + k \quad (2)$$

را به دست آورد.

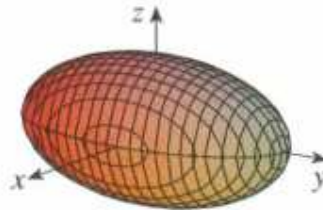
در این درس هدف ارائه ماتریسهای دوران نمی باشد. لذا همواره فرم ۲ را در نظر می گیریم.

بر اساس اینکه ضرایب در معادله ی (۲) مخالف صفر و همچنین علامت آنها پس از تبدیل به مربع کامل

حالتهای زیر را داریم:

۱- اگر معادله به فرم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ تبدیل شود آنگاه رویه حاصل یک بیضی گون به مرکز مبدأ

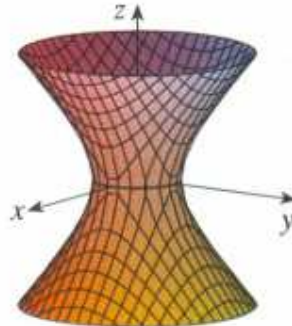
می باشد.



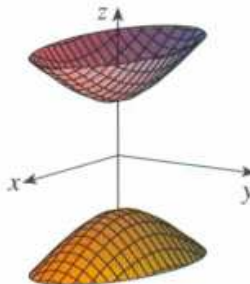
بیضی گون

۲- اگر معادله به فرم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ باشد. آنگاه رویه حاصل یک هذلولی گون یک پارچه نامیده می

شود.



۳- اگر معادله به فرم $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ آنگاه رویه حاصل هذلولی گون دو پارچه نامیده می شود.

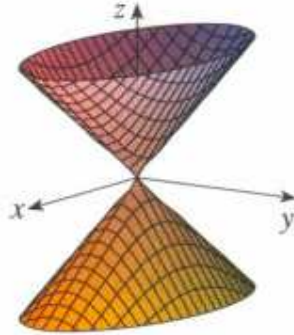


معادله فقط یک نقطه را مشخص می کند یعنی نقطه $(0,0,0)$.

اگر

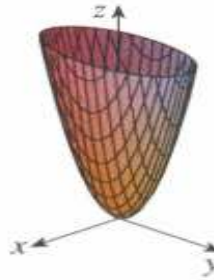
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

۴- اگر معادله به فرم $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ تبدیل شود آنگاه رویه حاصل یک مخروط بیضوی است.



مخروط بیضوی

۵- اگر معادله به فرم $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ تبدیل شود آنگاه رویه حاصل یک سهمی گون بیضوی است.

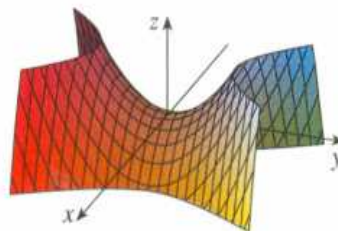


سهمی گون بیضوی

سهمی گون بیضوی

۶- اگر معادله به فرم $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ تبدیل شود، آنگاه رویه حاصل سهمی گون هذلولی یا زین است

نامیده می شود.



• اگر $ax + by + cz = d$

اگر $\frac{z^2}{c^2} + ax + by = d$

مثال: معادله $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$ را به فرم استاندارد تبدیل نموده و رویه مشخص شده توسط این معادله را نام ببرید.

حل:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 1 - (y-1)^2 + 1 + (z+2)^2 - 4 + 2 &= 0 \\ \Rightarrow (x-1)^2 - (y-1)^2 + (z+2)^2 &= 2 \\ \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(y-1)^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(z+2)^2}{(\sqrt{2})^2} &= 1 \end{aligned}$$

رویه حاصل یک هذلولی گون یک پارچه به مرکز $(1, 1, -2)$ در راستای محور y ها است.

مثال: معادله $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$ را به فرم استاندارد تبدیل نموده و رویه حاصل را نام

ببرید.

حل:

$$\begin{aligned} 4(y-2)^2 - 16 + (z-2)^2 - 4 - x + 20 &= 0 \\ 4(y-2)^2 + (z-2)^2 &= x \\ \Rightarrow (y-2)^2 + \frac{(z-2)^2}{4} &= \frac{x}{4} \end{aligned}$$

رویه حاصل یک سهمی گون در راستای محور x ها به مرکز $(0, 2, 2)$ می باشد.

اگر بخواهیم رویه مربوط به $Z \sin xy$ را رسم کنیم.

• در حالت کلی برای رسم نمودار یک تابع دو متغیره یا رویه مربوط به یک معادله شامل سه متغیر از

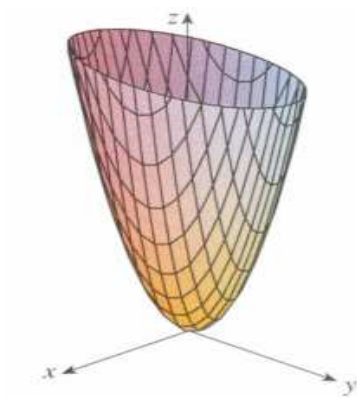
منحنی های تراز استفاده می کنیم.

تعریف: یک منحنی تراز از تابع $Z = f(x, y)$ منحنی است با معادله $f(x, y) = k$ ، که در آن k یک عدد ثابت است.

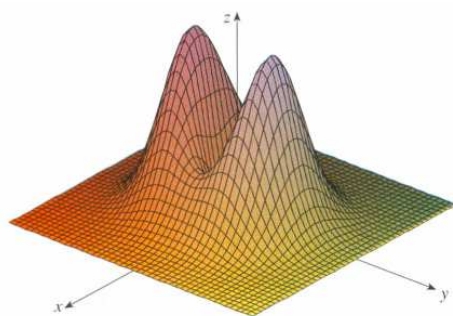
در عمل رویه مربوط به تابع $Z = f(x, y)$ یا $F(x, y, z) = C$ حاصل سه گروه از منحنی های تراز است که در هر مرحله به جای یکی از متغیرهای x, y یا z مقدار ثابت قرار می دهیم.

در نرم افزارهای کامپیوتری مربوط به رسم نمودار توابع چند متغیره از این روش استفاده می کنیم.

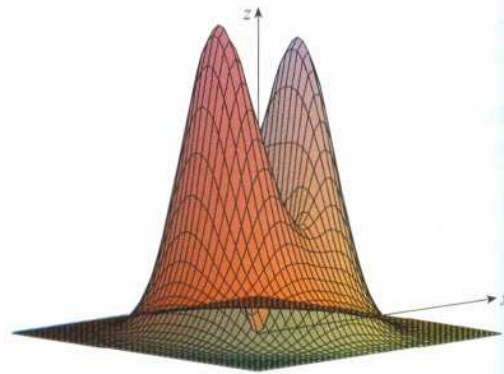
مثال: رویه مربوط به تابع $Z = 4x^2 + y^2$ در شکل نشان داده شده است.



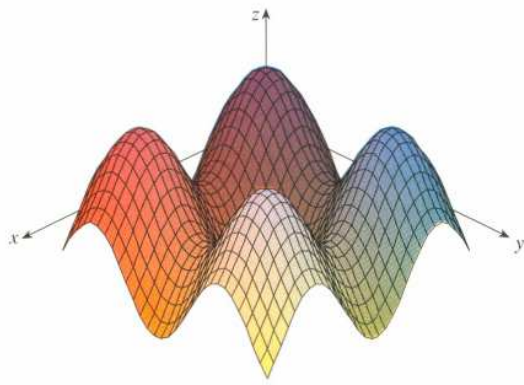
مثال: نمودار مربوط به چند تابع در شکل ها مشخص شده است.



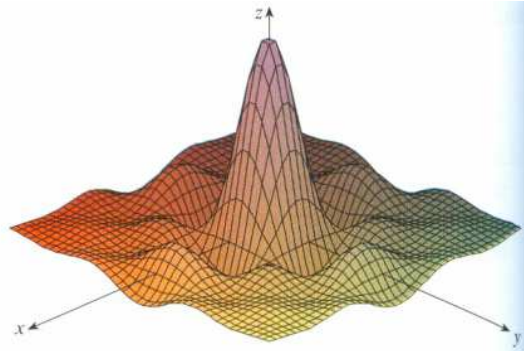
(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(c) $f(x, y) = \sin x + \sin y$



(d) $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$