سعید زبی...

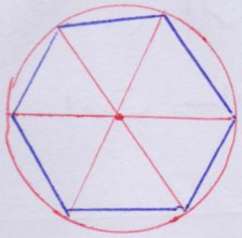
تعریف ۸.۵.۸) اگر $\gamma = C(O, r)$ یک دایره باشد. ناحیه درون دایره عبارت است از تمامی نقاطی مانند X که: $Int(\gamma) = \{X \mid OX < r\}$

ناحیه دایره‌ای مشخص شده توسط γ اجتماع نقاط روی دایره γ و نقاط درونی آن است.

به راحتی می‌توان یک چند ضلعی مانند $\bar{H}_n$ را درون دایره محاط کرد.

برای هر ضلع از $\bar{H}_n$ یک مثلث وجود دارد که مرکز آن O و دو رأس دیگر آن روی دایره قرار دارد.

پس $\bar{H}_n$ ناحیه‌ای متناظر با n ناحیه مثلثی تعریف می‌شود.



قضیه ۹.۵.۸) برای هر n داریم: $\alpha(\bar{H}_n) < \alpha(S)$ و $\alpha(\bar{H}_n) < \alpha(\bar{H}_{n+1})$

اثبات:

n ضلعی منتظم $\bar{H}_n$ از n مثلث متساوی الساقین که ساق های آن شعاع دایره (به طول r) می باشند و زاویه بین دو ساق در مثلث برابر $\frac{2\pi}{n}$ است تشکیل شده است.

می دانیم که مساحت هر مثلث دلخواه مانند ABC برابر است با: $\frac{1}{2} cb \sin A$

بنابراین مساحت مثلث XOY برابر است با: $\frac{1}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$

و از آنجایی که $\bar{H}_n$ از n مثلث تشکیل شده است مساحت آن برابر است با: $\alpha(\bar{H}_n) = nS_{X\hat{O}Y} = \frac{1}{2} n r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$

می خواهیم ثابت کنیم دنباله $\alpha(\bar{H}_n)$ اکیداً صعودی است. از رابطه آن برحسب n مشتق می‌گیریم و اثبات می کنیم مشتق آن همواره مثبت است.

$$\frac{1}{2} r^2\left(\sin\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n^2}\cdot n\cos\frac{2\pi}{n}\right)>0 \iff \sin\frac{2\pi}{n} > \frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n} \iff \tan\frac{2\pi}{n} > \frac{2\pi}{n}$$

(می دانیم به ازای هر $0<x<\frac{\pi}{2}$ ، $\tan x > x$ و $\sin x < x$)

$\alpha(\bar{H}_n) = \frac{1}{2} r^2 n \sin\frac{2\pi}{n} < \pi r^2 \Longrightarrow$ دنباله کران دار است

با توجه به اینکه دنباله مورد نظر اکیداً صعودی و کران دار است پس همگراست و

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(\bar{H}_n) = \sup(\alpha(\bar{H}_n))$$