پاسخ پرسش‌های آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۲، ترم اول سال تحصیلی ۹۹-۹۸

۱. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر مفروض است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) ثابت کنید f در نقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزئی f در $(0,0)$ را بدست آورید.

ج) وجود مشتق سویی تابع f در $(0,0)$ و در سوی بردار یکه‌ی $u=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ را بررسی کنید.

د) مشتق‌پذیری f در نقطه‌ی $(0,0)$ را بررسی کنید. (۴۰ نمره)

حل. الف) باید نشان دهیم

$$\forall\epsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \|(x,y)-(0,0)\|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$$

برای $\epsilon>0$ و $(x,y)\neq(0,0)$، با توجه به این که

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &= \left|\frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}-0\right|\leq\frac{|x^2y|}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

برای داشتن $|f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$ کافی است $\sqrt{x^2+y^2}<\epsilon$. برای این منظور $\delta>0$ را با شرط $\delta\leq\epsilon$ انتخاب می‌کنیم.

ب)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\sin((\Delta x)(0))}{\Delta x^2}}{\Delta x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{(0)\sin((0)(\Delta y))}{\Delta y^2}}{\Delta y}=0\end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{at\sin(abt^2)}{a^2t^2+b^2t^2}-0}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{a\sin\left((ab)t^2\right)}{t^2}=a^2b\end{aligned}$$

پس مشتق سویی در سوی بردار یکه‌ی $u=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ وجود دارد و $D_uf(۰,۰)=a^۲b$.

د) اگر f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه‌ی $u=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ مقدار دو عبارت $D_uf(۰,۰)$ و $\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$ با یکدیگر برابر خواهند بود. اما با استفاده از قسمت ب داریم: $\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}=۰$ که برای همه مقادیر a و b با شرط $a^۲+b^۲=۱$ با $D_uf(۰,۰)=a^۲b$ در قسمت ج برابر نیست. (به طور مثال برای $a=b=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$) در نتیجه f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

---

۲. فرض کنید g و f توابعی مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ باشند. اگر z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y به صورت ضمنی با معادله‌ی $f(xz)+g(yz)=۰$ داده شده باشد، نشان دهید:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-z$$

(۱۰ نمره)

حل. بنا به فرض مسئله، تابع مشتق‌پذیری چون $z(x,y)$ وجود دارد که برای همه مقادیر (x,y) در معادله‌ی $f\big(xz(x,y)\big)+g\big(yz(x,y)\big)=۰$ صدق می‌کند. اگر قرار دهیم $u(x,y):=xz(x,y)$ و $v(x,y)=yz(x,y)$ آنگاه

$$\forall(x,y),\quad f\big(u(x,y)\big)+g\big(v(x,y)\big)=۰$$

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(f\big(u(x,y)\big)+g\big(v(x,y)\big)\Big)=۰\quad \text{و}\quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(f\big(u(x,y)\big)+g\big(v(x,y)\big)\Big)=۰$$

به این ترتیب، با استفاده از قاعده زنجیری،

$$\begin{cases} f_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=۰\\[2ex] f_u\frac{\partial u}{\partial y}+g_v\frac{\partial v}{\partial y}=۰\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} f_u(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+g_v(y\frac{\partial z}{\partial x})=۰\\[2ex] f_u(x\frac{\partial z}{\partial y})+g_v(z+y\frac{\partial z}{\partial y})=۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{zf_u}{xf_u+yg_v}\\[1ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{zg_v}{xf_u+yg_v}\end{cases}$$

در نتیجه

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z(xf_u+yg_v)}{xf_u+yg_v}=-z$$

---

۳. معادله‌ی خط قائم بر سهمی‌وار $z = x^۲ + y^۲$ را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۲)$ به دست آورید.

ب) مختصات نقطه‌ی دیگر بر خورد خط در قسمت الف را با سهمی‌وار بدست آورید. (۲۰ نمره)

حل. لف) اگر تابع f را با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = x^۲ + y^۲ - z$ در نظر بگیریم آنگاه سهمی‌وار، رویه‌ی تراز f به ازای ثابت صفر خواهد بود. اگر L خط قائم بر سهمی‌وار در نقطه‌ی $P_۰ = (۱, ۱, ۲)$ باشد آنگاه $\nabla f(۱, ۱, ۲)$ یک بردار راستا برای خط L است.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = ۲x\mathbf{i} + ۲y\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

به این ترتیب $\nabla f(۱, ۱, ۲) = ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{k}$ بردار راستا برای خط L است و معادله‌ی پارامتری خط L به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} x(t) = ۱ + ۲t \\ y(t) = ۱ + ۲t \\ z(t) = ۲ - t \end{cases}$$

ب) برای یافتن نقطه‌ی دیگر برخورد خط قسمت الف با سهمی‌وار، مختصات حط را در معادله‌ی سهمی‌وار قرار می‌دهیم، بنابراین خواهیم داشت: $۲ - t = ۲(۱ + ۲t)^۲$ یا $۸t^۲ + ۹t = ۰$. که دارای جوابهای $t = ۰$ و $t = \frac{-۹}{۸}$ است. در نتیجه نقاط برخورد خط L با سهمی‌وار $P_۰ = (۱, ۱, ۲)$ و $P_۱ = (\frac{-۵}{۴}, \frac{-۵}{۴}, \frac{۲۵}{۸})$ است. یعنی نقطه‌ی دیگر برخورد همان $P_۱$ است.
