خانم سید هاشمی ۲

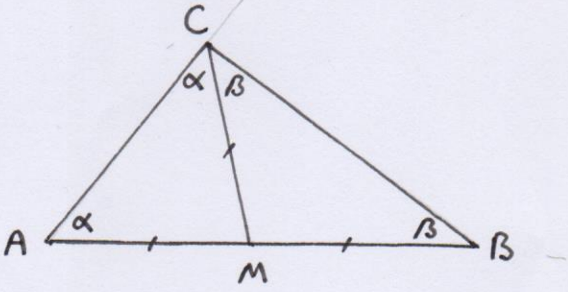
در این بخش، بعضی خواص زوایای محاطی در دایره‌های اقلیدسی را بررسی می‌کنیم و فرض می‌کنیم اصل توازی اقلیدس برقرار باشد. دو قضیه اول نشان می‌دهد که یک زاویه در مثلث، قائمه است اگر و تنها اگر ضلع روبه‌روی زاویه، قطر دایره محیطی باشد.

قضیه 8.3.1. فرض کنیم $\Delta ABC$ یک مثلث و $M$ وسط $\overline{AB}$ باشد. اگر $AM = MC$، آنگاه $\angle ACB$ قائمه است.

نتیجه 8.3.2. اگر رئوس مثلث $\Delta ABC$ روی دایره‌ای باشند و $\overline{AB}$ قطر دایره باشد، آنگاه $\angle ACB$ زاویه قائمه است.

این نتیجه معمولاً به این صورت بیان می‌شود: زاویه محاط شده در نیم دایره، قائمه است. (گزاره III. 31 اقلیدس)

اثبات قضیه 8.3.1. فرض کنیم $\alpha = \mu(\angle BAC)$ و $\beta = \mu(\angle ABC)$. بنابر قضیه مثلث متساوی الساقین داریم $\alpha = \mu(\angle ACM)$ و $\beta = \mu(\angle MCB)$. چون $M$ بین $A$ و $B$ قرار دارد، در نتیجه $\mu(\angle ACB) = \mu(\angle ACM) + \mu(\angle MCB)$. چون مجموع زوایای داخلی $\Delta ABC$، 180 است، بنابراین $2\alpha + 2\beta = 180$. پس $\alpha + \beta = 90$ و $\mu(\angle ACB) = 90$ و اثبات کامل است. □



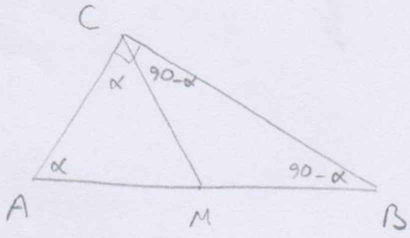

عکس قضیه 8.3.1 خود یک قضیه است.

قضیه 8.3.3. فرض می‌کنیم $\triangle ABC$ یک مثلث و $M$ وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ باشد. اگر $\angle ACB$ قائمه باشد، آنگاه $AM = MC$.

اثبات: فرض می‌کنیم $\alpha = m(\angle CAB)$. (چون $\alpha < 90^\circ$) از نقطه‌ی $C$ روی خط $AC$، بنابر بند سوم برداشت اصل نقاله، در طرفی که $B$ قرار دارد، به اندازه‌ی $\alpha$ جدا می‌کنیم. بنابر قضیه قطعه‌ی بر، نیم‌خط رسم شده، پاره‌خط $\overline{AB}$ را قطع می‌کند. نقطه‌ی تقاطع را $M$ می‌نامیم. اکنون با توجه به عکس قضیه مساوی‌الساقین، $AM = MC$ (I)

از طرف دیگر $m(\angle MCB) = 90-\alpha$. همچنین از آنجا که مجموع زوایای داخلی مثلث 180 است، $m(\angle MBC) = 90-\alpha$. پس با توجه به عکس قضیه مثلث مساوی‌الساقین، $MC = MB$ $\boxed{II}$.

اکنون با توجه به $\boxed{I}$ و $\boxed{II}$ نتیجه می‌شود $AM = MB$ یعنی $M$ وسط پاره‌خط $AB$ است.

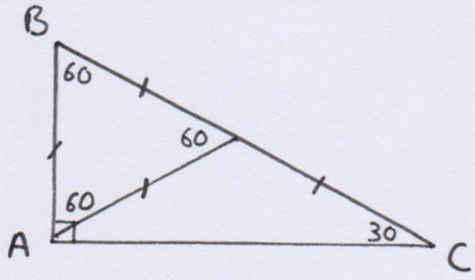



نتیجه 8.3.4. اگر $\angle ACB$ قائمه باشد، آنگاه $\overline{AB}$ قطر دایره محیطی $\triangle ABC$ خواهد بود.

قضیه 8.3.5. (قضیه 90-60-30). اگر زوایای داخلی مثلث $\triangle ABC$، اندازه‌های 30، 60 و 90 داشته باشند، آنگاه طول ضلع روبه‌روی زاویه 30، نصف وتر است.

اثبات: فرض می‌کنیم $m(\angle BAC) = 90$ و $m(\angle ABC) = 60$. از رأس $A$ به وسط ضلع $BC$ وصل کرده و آن را $M$ می‌نامیم. اکنون بنابر قضیه 8.3.1، $AM = MB$. در نتیجه با توجه به قضیه مثلث

مساوی الساقین، $60 = m(\angle ABM) = m(\angle MAB)$. چون مجموع زوایای درونی مثلث 180 است، پس $m(\angle BMC) = 60$. پس بنا بر عکس قضیه متساوی الساقین، $AB = MB$. یعنی $AB$ (که ضلع روبه روی زاویه 30 است) نصف وتر است. □

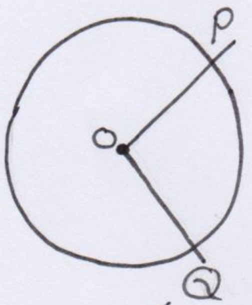



قضیه 8.3.6 (عکس قضیه 90 - 60 - 30). اگر $\triangle ABC$ قائمه باشد، بطوریکه طول یک ضلع قائم نصف وتر باشد، آنگاه زوایای درونی مثلث، 30، 60 و 90 خواهند بود.

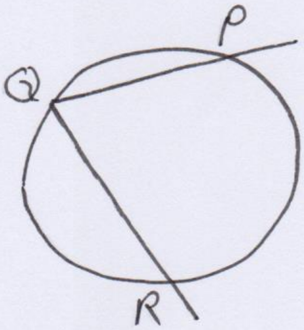
اثبات: فرض می‌کنیم $m(\angle CAB) = 90$ و $2AC = BC$. اکنون اگر از A به وسط $\overline{BC}$ وصل کرده و آنرا M بنامیم، بنا بر فرض مسئله و قضیه 8.3.1، داریم $AC = AM = CM$. پس زوایای درونی مثلث برابر بوده و همگی برابر 60 هستند. پس $m(\angle ACB) = 60$ و چون زوایای داخلی مثلث 180 هستند، $m(\angle CBA) = 30$. در نتیجه زوایای درونی مثلث 30، 60 و 90 خواهند بود. □

تعریف 8.3.7. فرض کنیم $\gamma = C(O,r)$ یک دایره باشد. یک زاویه محاطی برای $\gamma$، زاویه‌ای به صورت $\angle PQR$ است که P، Q و R روی دایره $\gamma$ باشند. کمانی از دایره که زاویه‌ی $\angle PQR$ جدا می‌کند، مجموعه‌ای از نقاط روی دایره است که درون $\angle PQR$ قرار دارند. یک زاویه مرکزی برای $\gamma$، زاویه‌ای به صورت $\angle POQ$ است به طوری که P و Q روی دایره $\gamma$ قرار دارند.

تناظری بدیهی بین زوایای محاطی و زوایای مرکزی وجود دارد.




زاویه مرکزی

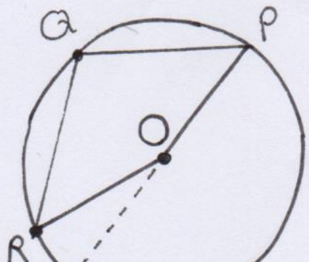



زاویه محاطی

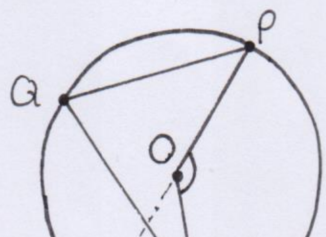
تعریف 8.3.8. فرض کنیم $\angle PQR$ محاطی برای $C(O,r)$ باشد بطوریکه Q و R دو طرف $\overleftrightarrow{OP}$، یا P و Q دو طرف $\overleftrightarrow{OR}$ باشند. در این صورت $\angle POR$ را زاویه مرکزی متناظر گویند.

قضیه 8.3.9 (قضیه زاویه مرکزی). اندازه زاویه محاطی یک دایره، نصف اندازه‌ی زاویه مرکزی متناظر با آن است.

تبصره: با توجه به تعریف زاویه مرکزی متناظر، واضح است که یک زاویه محاطی، زاویه مرکزی متناظر دارد اگر و تنها اگر اندازه زاویه محاطی کمتر از 90 باشد. این موضوع با قضیه بالا مطابقت دارد زیرا زاویه مرکزی متناظر باید اندازه‌ای کمتر از 180 داشته باشد. اگر فرض کنیم یک زاویه بتواند اندازه 180 یا بیشتر داشته باشد، آنگاه به سادگی می‌توان به هر زاویه محاطی، یک زاویه مرکزی متناظر با آن اختصاص داد و قضیه زاویه مرکزی در تمام حالت‌ها صدق می‌کند. می‌توان دید که نتیجه 8.3.2 در واقع حالت خاصی از قضیه 8.3.9 است.



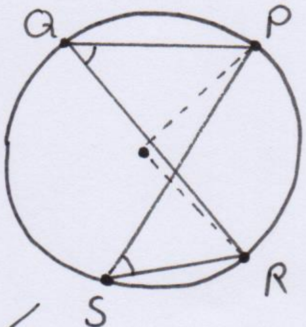

زاویه مرکزی، متناظر زاویه محاطی نیست.




زاویه مرکزی متناظر

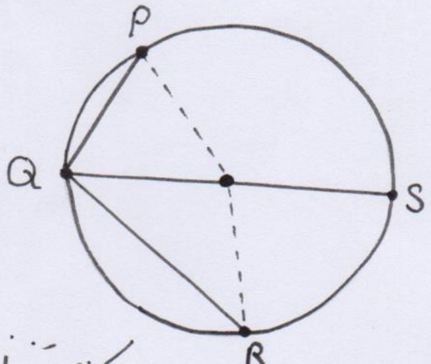
نتیجه 8.3.10 (قضیه زاویه محاطی). اگر دو زاویه محاطی، کمان یکسانی را جدا کنند، آنگاه قابل انطباق اند.

اثبات. در حالتی که زاویه مرکزی متناظر وجود داشته باشند، نتیجه از قضیه زاویه مرکزی نتیجه می شود. زیرا برای یک کمان دایره، یک زاویه مرکزی به طور یکتا وجود دارد.




زوایای محاطی $\angle PQR$ و $\angle PSR$ برابرند زیرا زاویه ی مرکزی متناظر یکسانی دارند.

به طور کلی فرض کنیم $\angle PQR$ زاویه محاطی دایره باشد. S را مقابل قطری Q در نظر می گیریم. زوایای محاطی $\angle PQS$ و $\angle SQR$ هر دو زاویه مرکزی متناظر دارند و با توجه به قسمت اول اثبات، حکم ثابت می شود. □




زوایای محاطی $\angle PQS$ و $\angle SQR$ هر دو زاویه ی مرکزی متناظر دارند.