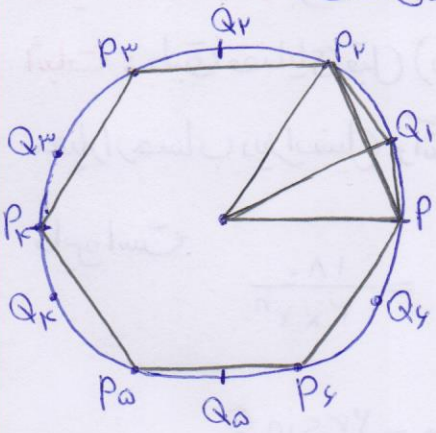
قضیه ۸.۵.۲ : دنباله‌ی $L_1, L_2, L_3, \ldots$ یک دنباله‌ی اکیداً صعودی است.



باید هر جمله‌ی دنباله از جمله‌ی قبلی بزرگ‌تر باشد.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم $L_1 < L_2$، ابتدا در $\triangle P_1Q_1P_2$ طبق مثلثی داریم $P_1P_2 < P_1Q_1 + Q_1P_2$ و به همین ترتیب $P_2P_3 < P_2Q_2 + Q_2P_3$ و ... و $P_6P_1 < P_6Q_6 + Q_6P_1$ پس

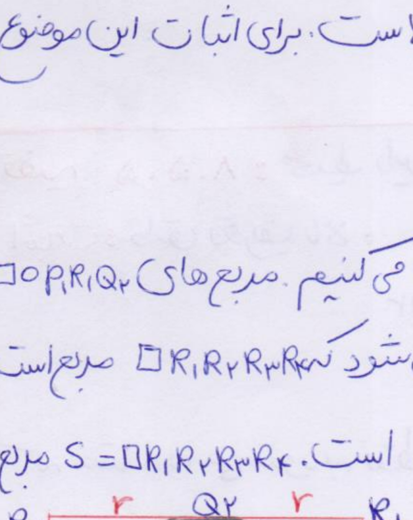
$$L_1 = P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots + P_5P_6 + P_6P_1 < P_1Q_1 + Q_1P_2 + P_2Q_2 + Q_2P_3 + \cdots + P_6Q_6 + Q_6P_1 = L_2$$

به همین ترتیب هر ضلع L_n از مجموع دو ضلع در L_{n+1} کوچکتر است در نتیجه عدد L_n به عنوان مجموع اضلاع از مجموع اضلاع L_{n+1} (که دارای تعداد ضلع ۲ برابر است) کمتر است.

- می‌خواهیم محیط دایره‌ی $\gamma = C(O,2)$ را با حدگرفتن از دنباله‌ی $\{L_1, L_2, L_3, \ldots\}$ به دست آوریم.
برای این که مطمئن شویم این دنباله همگراست باید بگوییم دارای کران بالاست. برای اثبات این موضوع از محیط مربع محیطی استفاده می‌کنیم. (که محیط آن از هر L_n بزرگ‌تر است)

ساختار:

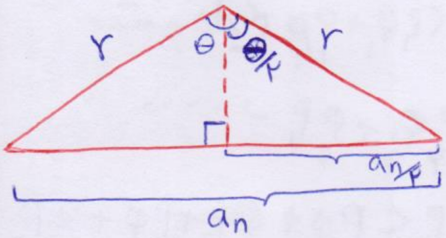
- اگر $\gamma = C(O,2)$ یک دایره باشد نقاط R_1، R_2، R_3 و R_4 را انتخاب می‌کنیم. مربع‌های $\square OP_1R_1Q_2$، $\square OQ_2R_2P_4$، $\square OP_4R_3Q_5$، $\square OQ_5R_4P_1$ به وجود می‌آیند. مشاهده می‌شود که $\square R_1R_2R_3R_4$ مربع است که هر ضلع این مربع مماس بر دایره‌ی γ است و محیط مربع برابر ۸۲ است. $S = \square R_1R_2R_3R_4$ مربع محیطی نامیده می‌شود.



عارفه خلیلی

قضیه ۸.۵.۳ : برای هر n، L_n کمتر از محیط مربع محیطی است.

اثبات : طبق قضایای قبل (دو قضیه قبل)، دنباله‌ی L_n یک دنباله‌ی صعودی و کراندار است. طبق قضیه معیار از حساب دیفرانسیل و انتگرال، هر دنباله‌ی صعودی و کراندار همگراست. حد این دنباله برابر محیط دایره است.



$$\theta = \frac{360}{3\times 2^n} \qquad \frac{\theta}{2} = \frac{360}{3\times 2^n \times 2} = \frac{180}{3\times 2^n}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{a_n}{2}}{r} = \frac{a_n}{2r} \Rightarrow a_n = 2r\sin\frac{\theta}{2}$$

$$L_n = n a_n \qquad \text{باید } L_n \overset{?}{<} 8r \Longrightarrow n a_n \overset{?}{<} 8r \Longrightarrow 2nr\sin\frac{\theta}{2} \overset{?}{<} 8r$$

$$\overset{\forall n}{\Longrightarrow} n\sin\frac{\theta}{2} \overset{?}{<} 4$$

$$? = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\theta}{2} = \pi \text{ عدد } \quad \text{و} \quad (3 < \pi < 4)$$

تعریف ۸.۵.۴ : اگر $C(O,r)$ یک دایره باشد محیط دایره‌ی $C(O,r)$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\text{محیط } C = \lim_{n\to\infty} L_n$$

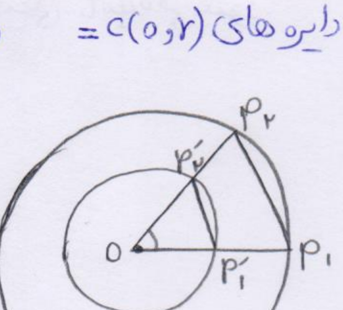
قضیه ۸.۵.۵ : محیط دایره‌ی $C(O,r)$ مستقل از مرکز دایره (O) و تنها به شعاع r وابسته است.

اثبات : طبق تعریف بالا :

$$\text{محیط } C = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} 2nr\sin\frac{\theta}{2} = 2r\underbrace{\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\theta}{2}}_{\text{برابر عدد } \pi \text{ می‌شود}} = 2\pi r$$

که مشاهده می‌شود به نقطه‌ی O وابسته نیست.

قضیه ۸.۵.۶ : اگر r و r' دو عدد مثبت و C و C' به ترتیب محیط های دایره های $C(O,r)$ و $C(O,r')$ باشند $\frac{C}{r} = \frac{C'}{r'}$.



اثبات : مثلث های $\triangle OP_1P_2$ و $\triangle OP_1'P_2'$ متشابه هستند.

پس می‌توان نوشت : $\frac{P_1P_2}{OP_1} = \frac{P_1'P_2'}{OP_1'}$ یا $\frac{P_1P_2}{r} = \frac{P_1'P_2'}{r'}$.

و این تساوی ها را برای هر ضلع این شش ضلعی می‌توان نوشت.

ادامه‌ی قضیه‌ی ۸.۵.۶ : می‌توان نوشت $\frac{L_1}{r}=\frac{L'_1}{r'}$ و قضیه‌ی تشابه مثلث‌ها به طور کلی می‌تواند برای نشان دادن $\frac{L_n}{r}=\frac{L'_n}{r'}$ (برای هر n) استفاده شود که با حد گرفتن، وقتی $n\to\infty$ نتیجه‌ی مطلوب را به ما می‌دهد.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{r}=\lim_{n\to\infty}\frac{L'_n}{r'}\Rightarrow\frac{C}{r}=\frac{C'}{r'}$$

روش دوم : طبق قضیه‌ی ۸.۵.۵ گفتیم :

$$C=2r\overbrace{\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\theta}{2}}^{A}=2rA$$

$$C'=2r'\underbrace{\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\theta}{2}}_{A}=2r'A$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\frac{C}{r}=\frac{2rA}{r}=2A\\[1ex]\frac{C'}{r'}=\frac{2r'A}{r'}=2A\end{cases}\Longrightarrow\frac{C}{r}=\frac{C'}{r'}$$

تعریف ۸.۵.۷ : عدد پی (π) یعنی از نسبت مشترک است. اگر $C(O,r)$ یک دایره و r شعاع و C محیط باشد آن گاه $\pi=\frac{C}{2r}$ (چون این نسبت برای همه‌ی دایره‌ها یکسان است، عدد π به صورت یک عدد حقیقی تعریف شده است) فرمول $C=2\pi r$ یک تعریف است و یک قضیه نیست.

درحقیقت $\frac{C}{r}$ برای همه‌ی دایره‌ها یکسان است و با قضیه‌ی تشابه مثلث‌ها اثبات شده است.

فرمول $C=2\pi r$ تنها در هندسه‌ی اقلیدسی معتبر است چون هر یک از مثلث‌های OP_iP_{i+1} متساوی الساقین است و دیدیم که $L_1=6r$ و $\pi>\lim_{n\to\infty}\frac{6r}{2r}=3$ و از طرف دیگر محیط مربع محیطی $8r$ است پس $\pi<\lim_{n\to\infty}\frac{8r}{2r}=4$ درنتیجه $3<\pi<4$.

تعریف ۸.۵.۸ : اگر $\gamma=C(O,r)$ یک دایره باشد، درون γ شامل تمام نقاط داخل γ است، به عبارت دیگر

$$Int(\gamma)=\{X \mid OX<r\}$$

ناحیه‌ی دایره‌ای تعیین شده توسط γ، اجتماع دایره‌ی γ و نقاط درونی دایره‌ی γ است $(Int(\gamma))$

عارفه خلیلی