جهانگیری

۸.۵ (محیط و مساحت دایره‌های اقلیدسی)

در این بخش ارتباط بین فرمول‌های $C=2\pi r$ و $A=\pi r^2$ برای محیط و مساحت یک دایره به شعاع r را بررسی می‌کنیم. چند چیز در مورد این فرمول است که باید از ابتدا درک شود. اول، فرمول اقلیدسی است. در هندسه‌ی اقلیدسی، محیط یک دایره متناسب با شعاع است. اما این در هندسه‌ی هذلولی درست نیست.

در هندسه‌ی هذلولی، محیط یک دایره به صورت نمایی با شعاع رشد می‌کند. فرمول هذلولی برای محیط و مساحت به بسیاری از بینش‌ها با توجه به ساختار فضای هذلولی است، اما گسترش چنین فرمول‌هایی نیاز به رفتن فراتر از تکنیک‌های تشریح شده در اینجاست. بنابراین ما مطالعه‌ی خود را به هندسه‌ی اقلیدسی محدود می‌کنیم.

در حقیقت شباهت بین فرمول‌های اقلیدسی با استفاده‌ی ما از شباهت بین قضیه‌ی مثلث‌ها و فرمول‌های اقلیدسی برای مساحت مثلث در ارتباط با این مبحث آشکار خواهد شد.

قبل از اینکه ما بفهمیم و از این فرمول‌ها قدردانی کنیم، ما باید تعریف کنیم که از محیط و مساحت دایره چه منظوری داریم.

خط‌کش اصلی به ما اجازه‌ی می‌دهد برای اندازه‌گیری طول یک پاره‌خط راست و آسان می‌کند که آن را تعمیم دهیم به طول یک مسیر چندضلعی (یکی شامل تعداد متناهی از قطعات خط راست، قسمت‌هایی که اجازه می‌دهد از یکی به دیگری پایان می‌پذیرد)

اما گسترش طول به مسیرهای منحنی، مانند دایره، نیاز به یک فرایند محدود دارد. بحث همواره با مراحل محدود کردن مناسب در دروس حسابان دیفرانسیل وقتی که از انتگرال‌ها برای محاسبه‌ی طول منحنی استفاده می‌کنید، مواجه می‌شوید. خیلی جالب است که ما عهده می‌کنیم تا به حال، ایده‌ی استفاده از یک فرایند محدود به محاسبه طول یک منحنی، برای اینکه محاسبه به طول یک منحنی به علت یونانیان باستان

در زمان قبل از اختراع حساب دیفرانسیل و انتگرال حدود ۲۰۰۰ سال پیش.

در نهایت باید ذکر شود که فرمول برای محیط و مساحت یک دایره می تواند از تعریف از عدد حقیقی π جدا باشد.

در واقع دلیل اصلی برای گنجاندن این بحث از محیط و مساحت نیاز به روشن شدن این رابطه است.

پس از اینکه ما چیزی را که از محیط یک دایره منظورمان بود را تعریف کردیم، ما نشان خواهیم کرد که نسبت محیط به قطر برای تمام دایره ها یکسان است.

به عبارت دیگر، فرمول $c = 2\pi r$ فقط یک تعریف است و قضیه ای که ثابت می کند که نسبت $\frac{c}{d}$ برای تمام دایره ها یکسان است.

مبدأ این ایده ها دارای قدمت قدیمی هستند. به اصطلاح روش کاهش به اودکسوس نسبت داده می شود (۴۰۸-۳۵۵ قبل از میلاد مسیح)

با استفاده از آن، می توان محیط یک دایره را کوچکترین کران از محیطی از چندضلعی های محاط در دایره تعریف کرد. یونانیان می دانستند که اگر دو دایره

با قطرهای d_1 و d_2، به ترتیب محیط های c_1 و c_2 داشته باشند، بنابراین نسبت محیط ها با نسبت قطرها یکسان است.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

از بالا نتیجه می گیریم که $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$

بنابراین برای هر دو دایره، نسبت محیط به قطر برای همه ی دایره ها یکسان است. این نسبت عددی است که آن را π تعریف کردیم.

اقلیدس هیچ گزاره ای در مورد محیط یک دایره بیان نکرده است اما او گزاره هایی را درباره ی مساحت دایره ها بیان کرده است. گزاره ی ۲

بیان می کند که اگر دایره ها مساحت های A_1 و A_2 داشته باشند، بنابراین نسبت های مساحت ها با مربع نسبت قطرها یکسان است که

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

از این رو داریم عدد ثابت k ای وجود دارد که برای هر دایره ای $A=kd^2$. هیچ نشانه ای وجود ندارد که اقلیدس درک عدد ثابت k را با ثابتی

که در فرمول مربوط به محیط دایره با قطر است، درک داده است. واقعیت این است که رابطه ای بین دو عدد ثابت وجود دارد که قابل توجه است.

از آنجا که یکی از ثابت ها مربوط به طول در حالی که دیگری مربوط به مساحت است. ارتباط بین ثابت ها در دو فرمول برای اولین بار توسط

ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ قبل از میلاد) کشف شد. او یک کتاب کوتاه با عنوان اندازه گیری یک دایره نگاشته و در آن بیان کرده که مساحت یک دایره

با مثلثی که ارتفاع آن شعاع دایره است که پایه اش محیط دایره است، برابر است. او با استفاده از این روش از فرمولش به اثبات رسید.

ارشمیدس همواره تقریب دقیق ارزش عددی π را با ایجاد محیطی از چندضلعی ها در دایره پیدا کرده است. با استفاده از چندضلعی ها و در مورد

با عنوان مسائلی به عنوان ۹۶ ضلعی، او توانست ثابت کند که $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ است. و حتونتی (۵۰۱-۵۸۵) - حتی دقیق ترین تقریب ارزش

عددی π که توسط تسو چانگ چی محاسبه شده بود (۴۳۰-۵۰۱) را به دست آورد.

در سال ۱۷۶۱، یوهان لامبرت (۱۷۲۸-۱۷۷۷) ثابت کرد که π غیرمنطقی است به طوری که این مقادیر عددی برای π هرگز نمی توانند بیش از

تقریب باشند؛ نه تنها π یک عدد گنگ است، امکان تعلق آن است که راه حلی برای هر معادله چندجمله ای با ضرایب عدد صحیح است. π این

واقعیت که اولین بار توسط فردیناند فون در سال ۱۸۸۲ در دون لیندمن پایه گذاری شده، بیان شده است.

این مبحث شامل فقط خارج از تعریف π را با ثبات فرمول ارشمیدس است. به ویژه ما محیط دایره را حد محیط یک دنباله خاص از چندضلعی

ها تعریف می کنیم. ما ترجیح می دهیم که اصطلاحات فنی برای تشکیل دادن اینکه سایر دنباله ها از نوشتن چندضلعی هایی که همان حد را ایجاد می کنند؛

نوشته می شوند و چندضلعی هایی که به سمت یک حد یکسانی میل می کنند، محدود و مشخص می کند. در عوض، ما چنین اصطلاحات فنی (استفاده کنیم) که با حدی که

هستند در همه دروس حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی را ترک خواهیم کرد. بنا به دلایل تاریخی به نظر می رسد که مناسب باشد که از ارشمیدس پیروی کنیم و استفاده

کنیم از چندضلعی های معمولی با 3×2^n طرف. اصل پنجم اقلیدس برای باقی مانده این فصل در نظر گرفته می شود.

تعریف ۸ (8.5.1): محیط L از چندضلعی $P_1P_2\dots P_n$ این چنین تعریف می شود

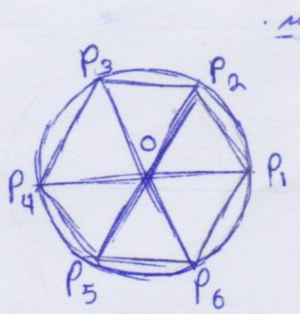
$L=P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{n-1}P_n+P_nP_1$

ساختار ۱: $\ell = C(O,r)$ را یک دایره و $\overline{P_1P_4}$ قطر ℓ در نظر بگیرید. یک طرف $\overleftrightarrow{P_1P_4}$ را انتخاب کنید و P_2 و P_3 را دو نقطه روی ℓ در طرف $\overleftrightarrow{P_1P_4}$ طوری

در نظر بگیرید که $m(\angle P_1OP_2)=m(\angle P_2OP_3)=60^\circ$ و $r=OP_2=OP_3$. در آخر نقطه‌ی P_5 و P_6 را در طرف مخالف $\overleftrightarrow{P_1P_4}$ طوری انتخاب کنید

که $m(\angle P_4OP_5)=m(\angle P_5OP_6)=60^\circ$ و $r=OP_5=OP_6$. آسان است که چک کنیم که $H_1=P_1P_2\ldots P_6$ یک شش ضلعی منتظم است که

در ℓ نوشته می‌شود. L_1 را محیط H_1 قرار دهید.



مشاهده می‌شود که H_1 تنها به این شیوه نشان داده می‌شود. اول قرارداد انتخاب قطر $\overline{P_1P_4}$ اختیاری است

به عنوان انتخابی از یک سمت از $\overleftrightarrow{P_1P_4}$. اگر یک قطر $\overline{P_1'P_4'}$ انتخاب شود یا یک سمت از $\overleftrightarrow{P_1P_4}$ انتخاب شود، بنابراین همه‌ی مثلث‌های

ΔOP_iP_{i+1} و $\Delta OP_i'P_{i+1}'$ یکسان هستند. بنابراین، محیط H_1، به طور کامل توسط این ساختار نشان داده می‌شود.

با H_1 شروع می‌کنیم. ما می‌دانیم که ساختار دنباله‌ی $H_1, H_2, H_3, \ldots$ که H_n یک چندضلعی منتظم با 3×2^n ضلع است که در ℓ نوشته می‌شود در حقیقت چنین

روش همه‌ی رئوس از H_{n-1} همان رئوس H_n هستند. اینجا ساختار H_2 است.

برای $i=1,\ldots,5$، Q_i را نقطه‌ای روی نیمساز $\angle P_iOP_{i+1}$ قرار دهید به طوری که $OQ_i=r$ و Q_6 را نقطه‌ای روی نیمساز زاویه‌ی $\angle P_6OP_1$ طوری قرار دهید که

$OQ_6=r$. H_2 را ۱۲ امین ضلعی از چندضلعی $P_1Q_1P_2Q_2\ldots P_6Q_6$ تعریف کنید و L_2 را محیط H_2 تعریف کنید. این پروسه در روشی واضح برای تعریف

H_n، $n \geq 3$، L_n را وسط H_n تعریف کنید. متذکر شوید که H_n، $n \geq 2$، به صورت منحصر به فرد توسط H_1 نشان داده می‌شود بنابراین نهایتاً یک عدد خوش تعریف که به L وابسته است.