سمینار مبانی هندسه (از سر تعریف 1.1.4 تا آخر اثبات قضیه 1.1.8)

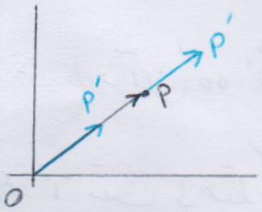
یاسمن غریب زاده

تعاریف

تعریف نقطه ثابت: نقطه‌ی P نقطه‌ی ثابت تبدیل T نامیده می‌شود اگر $T(P)=P$.

به عنوان مثال برای تبدیل همانی همه‌ی نقاط ثابت اند و برای تبدیل تقارنی نقاطی که روی خط تقارن قرار می‌گیرند ثابت اند.

تعریف تجانس: اگر O یک نقطه و k عدد مثبت حقیقی باشند. تجانس $D_{O,k}$ به مرکز O و نسبت ثابت k، $D_{O,k}(O)=O$ است و برای نقاط $P\neq O$، $D_{O,k}(P)$ نقطه‌ای است مانند P' روی $\overrightarrow{OP}$ به طوری که $OP'=k.OP$



* تجانس O را ثابت نگه می‌دارد و هر نقطه‌ی $P\neq O$ را به نسبت k حرکت می‌دهد، اگر $k>1$ نقطه‌ی P از O دورتر و اگر $k<1$، نقطه‌ی P به O نزدیک‌تر می‌شود.

* تجانس ایزومتری نیست مگر در حالتی که $k=1$ است.

قضیه: ترکیب دو ایزومتری، ایزومتری است. وارون یک ایزومتری نیز ایزومتری است.

اثبات قسمت اول: فرض می‌کنیم T_1 و T_2 دو ایزومتری باشند طبق تعاریف ۱-۱ بودن و پوشا بودن ترکیب این دو نیز ۱-۱ و پوشا است و در نتیجه $T_2 \circ T_1$ یک تبدیل است. حال دو نقطه‌ی P و Q را در نظر می‌گیریم داریم:

$$\xrightarrow{T_1 \text{ ایزومتری}} T_1(P)T_1(Q)=PQ$$

$$\xrightarrow{T_2 \text{ ایزومتری}} \underbrace{T_2(T_1(P))T_2(T_1(Q))}_{T_2\circ T_1(P)\,T_2\circ T_1(Q)=PQ}=T_1(P)T_1(Q)=PQ$$

پس ترکیب دو ایزومتری، ایزومتری است.

اثبات قسمت دوم: فرض می‌کنیم T یک ایزومتری و P، Q نقاط دلخواه باشند

$$\xrightarrow{T \text{ ایزومتری}} T(T^{-1}(P))T(T^{-1}(Q))=T^{-1}(P)T^{-1}(Q)=PQ$$

پس T^{-1} نیز یک ایزومتری است.

قضیه (ویژگی‌های ایزومتری): فرض کنیم $T:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ ایزومتری باشد.

1) T هم‌خط بودن را حفظ می‌کند: اگر P، Q، R سه نقطه هم‌خط باشند آنگاه $T(P)$، $T(Q)$، $T(R)$ نیز هم‌خط‌اند.

2) T میان بود را حفظ می‌کند: اگر P، Q، R سه نقطه باشند بطوریکه $P*Q*R$ آنگاه $T(P)*T(Q)*T(R)$

3) اگر A، B دو نقطه باشند، A'، B' تصویر آنها تحت تبدیل T، آنگاه $T(\overline{AB})=\overline{A'B'}$ و $\overline{A'B'}\cong\overline{AB}$

4) T خط را حفظ می‌کند: اگر l یک خط باشد $T(l)$ نیز خط است.

5) T میان بود پاره‌خط‌ها را حفظ می‌کند: اگر $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$، $\overrightarrow{OR}$ سه پاره‌خط باشند بطوریکه $\overrightarrow{OQ}$ مابین $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OR}$ قرار دارد آنگاه $\overrightarrow{OQ'}$ نیز مابین $\overrightarrow{OP'}$، $\overrightarrow{OR'}$ قرار می‌گیرد.

6) T مثلث را حفظ می‌کند: اگر ΔBAC یک مثلث باشد، $T(\Delta BAC)$ نیز مثلث است. $T(\Delta BAC)\cong\Delta BAC$

7) T زوایا را حفظ می‌کند: اگر $\angle BAC$ زاویه‌ای باشد، $T(\angle BAC)$ نیز یک زاویه است $T(\angle BAC)\cong\angle BAC$

8) T دوایر را حفظ می‌کند: اگر γ یک دایره به مرکز O و شعاع r باشد، $T(\gamma)$ نیز دایره‌ای است به مرکز $T(O)$ و شعاع r.

9) T مساحت را حفظ می‌کند: اگر R ساحت چندضلعی باشد، $T(R)$ نیز یک ساحت چندضلعی است و داریم $\alpha(T(R))=\alpha(R)$.

اثبات 1) : فرض کنیم P، Q، R سه نقطه مشخص هم‌خط باشند و P'، Q'، R' تصویر آنها تحت تبدیل T باشند، یکی از سه نقطه باید مابین دو نقطه دیگر باشد پس داریم $P*Q*R$

$$\xrightarrow{\text{تعریف}} PR = PQ+QR$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف ایزومتری}} P'R' = P'Q'+Q'R'$$

با برهان خلف فرض می‌کنیم P'، Q'، R' هم‌خط نباشند پس نقاط تشکیل یک مثلث می‌دهند

و طبق نامساوی مثلثی داریم

$P'R' < P'Q' + Q'R'$ خ.

اثبات ج: اگر P، Q و R سه نقطه متمایز باشند و تصویر آنها تحت T، P'، Q' و R' باشد بطوریکه $P * Q * R$ طبق

توضیحات بالا نبود داریم:

$$PR = PQ + QR \xrightarrow{*} P'R' = P'Q' + Q'R' \Rightarrow P' * Q' * R' \Rightarrow T(P) * T(Q) * T(R) \checkmark$$

$$\xrightarrow{\text{T ایزومتری}} \begin{cases} T(P)T(Q) = P'Q' & * \\ T(Q)T(R) = Q'R' \\ T(P)T(R) = P'R' \end{cases}$$

در قسمت بعد به قضیه اصلی و مهم این بخش می‌رسیم که علاوه بر اهمیت خود قضیه، شیوه و روند اثبات آن نیز در روند معرفی ایزومتری‌های بعدی کاربرد دارد.

قضیه (وجود و یکتایی ایزومتری): اگر $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ دو مثلث قابل انطباق باشند ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$) وجود دارد ایزومتری یکتایی مانند T بطوریکه $T(A) = D$، $T(B) = E$، $T(C) = F$. T ترکیب دو یا چند تقارن است.

اثبات: برای اثبات وجود چنین ایزومتری با معرفی چند تبدیل تقارنی و ترکیب آنها با یکدیگر به ایزومتری دلخواه می‌رسیم.

ابتدا عمودمنصف $\overline{AD}$ را رسم کرده و l می‌نامیم، φ_l را تبدیل تقارنی معرفی می‌کنیم بطوریکه طبق تعریف تبدیل تقارنی داریم $\varphi_l(A) = D$، $\varphi_l(B) = B'$، $\varphi_l(C) = C'$ (در حالتی که $A = D$ باشد خط l هر خط گذرا از A خواهد بود) برای معرفی تقارن بعدی عمودمنصف $\overline{B'E}$ را رسم نموده و m می‌نامیم، φ_m تبدیل تقارنی خواهد بود که $\varphi_m(B') = E$ (در حالتیکه $B' = E$، خط m، خط $\overleftrightarrow{DE}$ خواهد بود) از آنجاییکه $DB' = DE$، D روی خط m قرار می‌گیرد پس $\varphi_m(D) = D$ برای تقارن نقطه‌ی سوم نیز تعریف می‌کنیم $\varphi_m(C') = C''$

حال یا $C''=F$ است و یا C'' تقارن F تحت $\overleftrightarrow{DE}$ خواهد بود (چون S_l و S_m زاویه و فاصله را حفظ می‌کنند)

$n=\overleftrightarrow{DE}$ در نظر می‌گیریم، اگر $C''=F$ باشد قرار می‌دهیم $f=\iota$ ، و در حالت دوم قرار می‌دهیم $f=S_n$.

حال ترکیب سه ایزومتری معرفی شده f ، S_m و S_l ایزومتری دلخواه خواهد بود.

$T=f\circ S_m\circ S_l$ ایزومتری دلخواهی است که در آن $T(A)=D$ ، $T(B)=E$ ، $T(C)=F$ است