حسابشیری

قضیه زاویه مرکزی

اگر یک زاویه مرکزی و یک زاویه محاطی هر دو یک کمان از دایره را دربرداشته باشند اندازه زاویه محاطی نصف زاویه مرکزی خواهد بود.

اثبات: زاویه $\angle PQR$ را دردایره $\gamma = C(O,r)$ قراردهید. سه حالت وجود دارد که باید درنظرگرفت :

قرارگرفتن نقطه O روی یکی از ضلع های زاویه، قرارگرفتن نقطه O داخل زاویه، قرارگرفتن O خارج از زاویه

حالت اول: قرارگرفتن O روی یکی ازضلع های زاویه

ابتدا فرض کنید که $R * O * Q$ باشد. (شکل ۱).

قراردهید $\alpha = \mu(\angle OQP)$ و $\beta = \mu(\angle ORP)$

با توجه به قضیه مثلث متساوی الساقین (اگر دو ساق با یکدیگر برابر باشند زوایای پای دو ساق با یکدیگر برابرند) داریم:

$OP = OQ = r$ پس $\mu(\angle OQP) = \mu(QPO) = \alpha$

و

$OR = OP = r$ پس $\mu(\angle ORP) = \mu(\angle OPR) = \beta$

بنابراین طبق قضیه مجموع زوایای مثلث داریم:

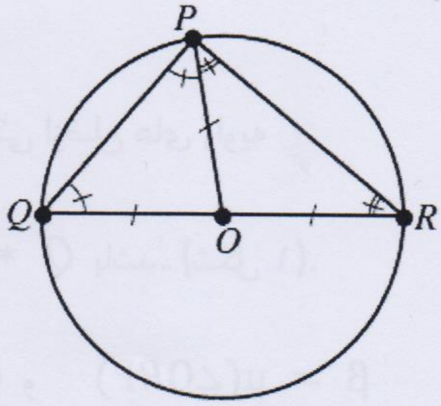
$$\sigma(\angle QPR) = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad (*)$$

جایگذاری $(*)$ در $\mu(\angle POR) = 180^\circ - 2\beta$ بنابراین

$$\mu(\angle POR) = 2\alpha + 2\beta - 2\beta = 2\alpha$$

در نتیجه

$$\mu(\angle POR) = 2\,\mu(\angle PQR)$$



(شکل ۱)

حالت دوم: قرارگرفتن داخل زاویه

فرض کنید O داخل زاویه PQR قرار دارد(شکل ۲)

S را نقطه ای روی دایره γ قرار دهید به طوری که $Q * O * S$ (نقاط Q و S نقاط متقاطر هستند.) درنتیجه

$$\mu(\angle POR) = \mu(\angle POS) + \mu(\angle ROS)$$

$$\mu(\angle PQR) = \mu(\angle PQS) + \mu(\angle RQS)$$

بنابراین با توجه به حالت اول که زاویه محاطی نصف زاویه مرکزی متناظر با آن است داریم:

$$\mu(\angle POS) = 2\,\mu(\angle PQS) \qquad (*)$$

$$\mu(\angle ROS) = 2\,\mu(\angle RQS) \qquad (**)$$

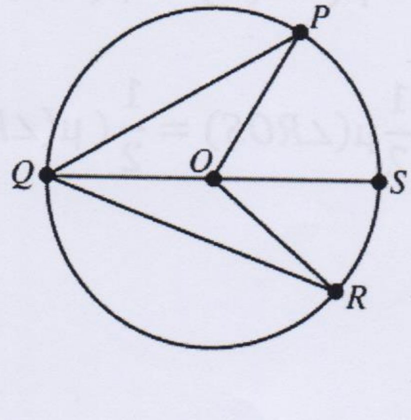
درنتیجه

باجایگذاری $(*)$ و $(**)$ در $\mu(\angle POR) = \mu(\angle POS) + \mu(\angle ROS)$ داریم:

$$\mu(\angle POR) = 2\mu(\angle PQS) + 2\,\mu(\angle RQS) = 2(\mu(\angle PQS) + \mu(\angle RQS))$$
$$= 2\,\mu(\angle PQR)$$

بنابراین

$$\mu(\angle POR) = 2\mu(\angle PQR)$$



(شکل ۲)

حالت سوم: قرارگرفتن O خارج اززاویه

فرض کنید O روی زاویه $\angle PQR$ و داخل آن قرارندارد.(شکل ۳)

نقطه S را روی دایره قراردهید به طوری که $\mathrm{S} * \mathrm{O} * \mathrm{Q}$ دو حالت به وجود می آید: یا P درون زاویه $\angle \mathrm{RQS}$ قرارمی گیرد و یا R درون زاویه $\angle \mathrm{PQS}$ قرارمی گیرد. فرض کنیدR داخل زاویه $\angle PQS$قراردارد. بنابراین

$$\mu(\angle PQR) = \mu(\angle PQS) - \mu(\angle RQS)$$

بنابراین با استنفاده از حالت اول داریم:

$$\mu(\angle POS) = 2\,\mu(\angle PQS) \qquad (*)$$

$$\mu(\angle ROS) = 2\,\mu(\angle RQS) \qquad (**)$$

درنتیجه

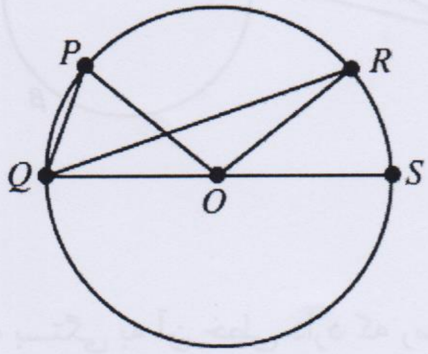
باجایگذاری (*) و (**) در $\mu(\angle PQR) = \mu(\angle PQS) - \mu(\angle RQS)$ داریم:

$$\mu(\angle PQR) = \frac{1}{2}\,\mu(\angle POS) - \frac{1}{2}\mu(\angle ROS) = \frac{1}{2}\big(\,\mu(\angle POS) - \mu(\angle ROS)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\,\mu(\angle POR)$$

بنابراین

$$\mu(\angle POR) = 2\mu(\angle PQR)$$



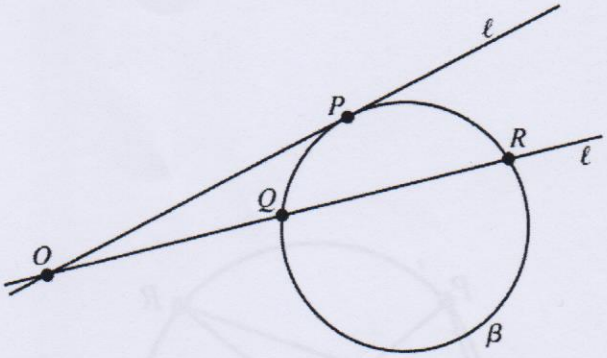
(شکل ۳)

قسمت آخری که می خواهیم در این بخش ثابت کنیم درفصل های بعدی کاربرد دارد برای اینکه بخواهیم بکار ببریم علامت ها را تغییرمی دهیم.

قوت یک نقطه نسبت به دایره:عددی حقیقی است که فاصله نسبی نقطه ای ازیک دایره رانشان می دهد.

تعریف: β را دایره ای قراردهید و O را نقطه ای که روی β نباشد. قوت O نسبت به دایره β به صورت زیرتعریف می شود:

انتخاب کنید هرخط l گذرا بر O که متقاطع بر β است. اگر l یک خط قاطع باشد که درنقاط R و Q بر β متقاطع است آنگاه قوت تعریف میشود $(OQ)(OR)$ اگر l مماس بر β درنقطه P باشد قوت O تعریف می شود $(OP)^2$



به نظرمی آید که قوت یک نقطه بستگی به آن خطی دارد که رسم می کنیم و به کمک آن محاسبه می کنیم اما درحقیقت قضیه بعدی نشان می دهد که قوت یک نقطه صرف نظرازاینکه چه خطی را انتخاب می کنیم یک عدد ثابت است. قضیه بعدی یکی از قضایای معروف اقلیدس است.

قضیه: قوت یک نقطه خوش تعریف است یعنی بدون درنظرگرفتن آنکه کدام خط استفاده می شود دارای قوت یکسان است تا زمانی که خط دارای حداقل یک نقطه تقاطع با دایره باشد.

اثبات: β رایک دایره و r را شعاع دایره β قراردهید وO را نقطه ای که روی دایره β قرارنمی گیرد .اگر O مرکزدایره β باشد پس هرخط l که از O می گذرد β رادر دونقطه R و Q قطع می کند.علاوه براین $(OQ)(OR) = r^2$ بدون درنظرگرفتن اینکه کدام خط l استفاده می شود .بنابراین قوت O نسبت به دایره β دراین مورد خوش تعریف است.

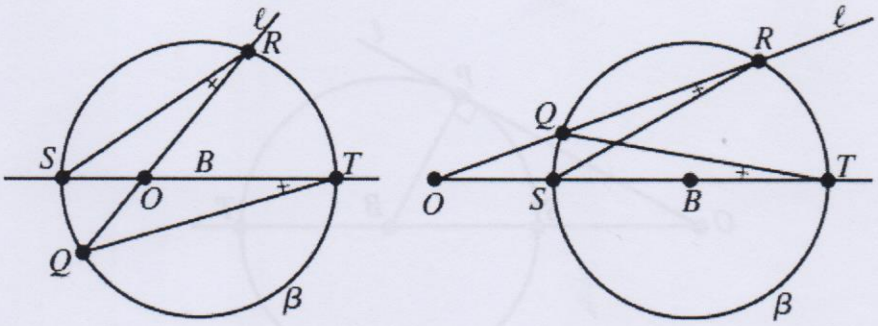
حال فرض کنید که $O \neq B$ که B مرکزدایره β است. S و T را دونقطه تقاطع $\overleftrightarrow{OB}$ و β قرار دهید. اثبات قضیه توسط اثبات دو ادعا تکمیل خواهدشد.

اول،اگر l یک خط قاطع گذرا بر O باشد که β را دردونقطه R و Q قطع می کند آنگاه

$$(OQ)(OR) = (OS)(OT)$$

دوم،اگر l یک خط گذرا بر O و مماس بر β درنقطه P باشد آنگاه

$$(OP)^2 = (OS)(OT)$$



اگر l یک خط قاطع باشد که از دونقطه متمایز Q و R روی β می گذرد آنگاه

$\angle ORS \cong \angle OTQ$ زیرا هر دو دارای کمان های متناظر بازاویه برابر روی دایره β هستند. علاوه بر این $\angle ROS \cong \angle TOQ$ زیرا یا زوایا یکسان هستند (وقتی O خارج دایره β است) یا زوایا متقابل به رأس هستند (وقتی O داخل دایره β است) درنتیجه

$$\Delta ORS \sim \Delta OTQ$$

باتوجه به قضیه تشابه مثلث

$$\frac{OR}{OS} = \frac{OT}{OQ}$$

حال فرض کنید l یک خط مماس بر دایره β در نقطه P و گذرا درنقطه O باشد .بااستفاده ازقضیه فیثاغورس داریم:

$$(OP)^2 = (OB)^2 - (BP)^2 \Rightarrow (OP)^2 = (OB - BP)(OB + BP)$$
$$= (OB - BS)(OB + BT) = (OS)(OT)$$