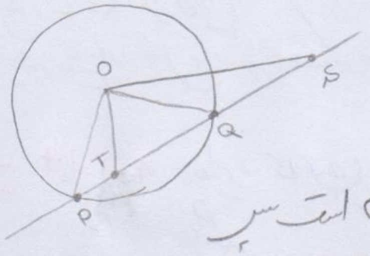
اعظم کریمی

قضیه ۸.۱.۱۵ اگر ω یک دایره و l یک خط قاطع باشد به طوری که l دایره ω را در نقاط P و Q قطع کند در نتیجه همه‌ی نقاط روی $\overline{PQ}$ درون دایره ω هستند و تمام نقاط $l \setminus \overline{PQ}$ خارج از ω

نقطه‌ی T را طوری اختیار می‌کنیم که T روی خط l بین P و Q باشد و همین ترتیب S را به طوری که بین P و Q نباشد



می‌خواهیم ثابت کنیم

$\overline{OS} > \overline{OQ} = R$

$\overline{OT} < \overline{OQ} = R$

مثلث $\triangle OPT$ را در نظر بگیرید در این مثلث زاویه $\angle OTQ$ یک زاویه خارجی است پس

$\angle OTQ > \angle OPT$ ①

از طرفی $\triangle OPQ$ مثلث متساوی‌الساقین است پس

$\angle OPQ \cong \angle OQP$ ②

پس در مثلث $\triangle OTQ$ ضلع مقابل به زاویه بزرگتر، بزرگتر از ضلع مقابل به زاویه کوچکتر پس

$\xRightarrow{①,②} \angle OQP < \angle OTQ$

$\overline{OQ} > \overline{OT}$ ✓

از طرفی در مثلث $\triangle OQS$ که

$\angle OQP > \angle OSQ$ ①

در مثلث $\triangle OQP$ نیز داریم

$\angle OQS > \angle OPQ$ ② به علت متساوی‌الساقین بودن این مثلث

③ $\angle OPQ \cong \angle OQP$

②,③ $\Rightarrow \angle OQS > \angle OQP$

②,③,① $\Rightarrow \angle OQS > \angle OSQ$

پس ضلع مقابل به زاویه بزرگتر یعنی $\angle OQS$ بزرگتر از ضلع مقابل به زاویه $\angle OSQ$ پس $\overline{OS} > \overline{OQ} = R$ ✓

عکس قضیه بالا

قضیه ۸.۱.۱۶ اگر ω یک دایره و l یک خط شامل نقطه‌ی A که درون ω و یک نقطه B که بیرون از ω و l یک خط قاطع بر ω است

اثبات: فرض کنیم $\omega = C(O, r)$ یک دایره باشد و l یک خط شامل یک نقطه‌ی A درون دایره‌ی ω و یک نقطه‌ی B بیرون ω

طبق قضیه ۸.۱.۰۸ یک خط مماس شامل نقطه‌ی درونی ω نمی‌شود پس l نمی‌تواند خط مماس باشد

پس کافی است ثابت کنیم $l \cap \omega \neq \emptyset$ (قضیه ۸.۱.۴)

به خصوص می‌خواهیم ثابت کنیم یک نقطه بین A و B که روی ω است وجود دارد

قرار می‌دهیم $d = AB$ برای هر $x \in [0, d]$ وجود دارد یک نقطه‌ی یکتای $D_x \in \overline{AB}$ که $AD_x = x$ (بنا به اصل خط‌کش)

تعریف می‌کنیم تابع $f : [0, d] \to [0, +\infty)$ با ضابطه‌ی $f(x) = OD_x$

$f(0) = OA < r$ $\quad$ $f(d) = OB > r$

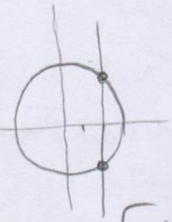
با توجه به پیوستگی فاصله‌ها پس تابع f پیوسته (قضیه ۴.۲.۰۸)

طبق قضیه مقدار میانی وجود دارد عدد c که $f(c) = r$ شود

نقطه‌ی D_c همان نقطه‌ی مورد نظر است ∎

نتیجه: اگر ω یک دایره و l یک خط شامل نقطه‌ی A درون دایره باشد پس l یک خط قاطع بر ω است.

اعظم کردی



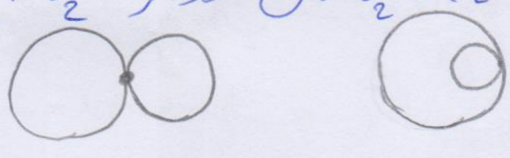
مثال ۸.۱.۱۳ پیوستگی دایره‌ها در اعداد گویا صحیح نیست

اگر ℓ یک دایره به مرکز $(0,0)$ و شعاع ۳ باشد پس معادله‌ی دایره به صورت $\ell = \{(x,y) \mid x^2+y^2=9\}$

و L را خط $x=2$ قرار می‌دهیم

در یک نتیجه بسیار ساده، قابل ملاحظه است که ℓ و L در صفحه اعداد گویا یکدیگر را قطع نمی‌کنند اما در $\mathbb{R}^2$ در دو نقطه‌ی $(2, \pm\sqrt{5})$ متقاطع می‌شوند

تعریف ۸.۱.۱۴ دو دایره‌ی $\ell_1 = C(O_1, r_1)$ و $\ell_2 = C(O_2, r_2)$ مماس هستند اگر $\ell_1 \cap \ell_2$ دقیقاً شامل یک نقطه باشد



قضیه ۸.۱.۱۵ (قضیه دایره‌های مماس)

اگر $\ell_1 = C(O_1, r_1)$ و $\ell_2 = C(O_2, r_2)$ در نقطه‌ی P مماس باشند آنگاه $O_1 \neq O_2$ (1)، و سه نقطه O_1 و O_2 و P هم‌خط هستند (2) و به علاوه دایره‌ها خط مماس مشترک در P خواهند داشت (3).

(1) ابتدا اثبات می‌کنیم O_1 و O_2 متمایزند

برهان خلف فرض کنیم $O_1 = O_2$ سه حالت داریم $r_1 < r_2$ یا $r_2 < r_1$ یا $r_1 = r_2$

اگر $r_1 = r_2$ باشد پس چون دایره توسط مرکز و شعاع مشخص می‌شود پس $\ell_1 = \ell_2$ خواهد بود در نتیجه اشتراک دو دایره نامتناهی می‌شود. ✗

اگر $r_1 < r_2$ در این صورت تمام نقاط ℓ_2 درون دایره‌ی ℓ_1 قرار می‌گیرد پس چون نقطه‌ای باید روی هر دو دایره باشد که فاصله‌ی آن از $O_2 = O_1$، r_1 و r_2 باشد که چنین نقطه‌ای وجود ندارد. ✗

به طور مشابه برای $r_2 < r_1$ تمام دایره‌ی ℓ_1 درون ℓ_2 قرار می‌گیرد و نقطه‌ی مماس نداریم پس O_1 و O_2 متمایزند

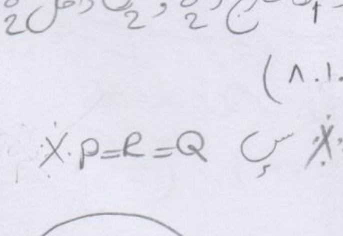
(2) حال ثابت می‌کنیم O_1 و O_2 و P هم‌خط هستند

برهان خلف فرض کنیم این سه نقطه هم‌خط نباشند پس قرار می‌دهیم $L = \overleftrightarrow{O_1O_2}$ چون O_1 خارج از ℓ_2 و O_2 داخل ℓ_2 پس L خط قاطع دایره‌ی ℓ_2 در نقطه‌ی Q و به طور مشابه L خط قاطع ℓ_1 در نقطه‌ی R نیز است (قضیه ۸.۱.۱۰)

$Q \neq R$ است زیرا اگر $Q = R$ باشد طبق تعریف دوایر در یک نقطه مماس هستند ✗ پس $P = R = Q$ ✗

چون دو دایره فقط در نقطه‌ی P اشتراک دارند پس $RQ \neq 0$

حال مثلث $\triangle O_1PO_2$ را در نظر بگیریم طبق خواص مثلث داریم



$$O_1O_2 < O_1P + PO_2 = r_1 + r_2$$

اما

$$O_1O_2 = O_1Q + \underline{QR} + RO_2 > r_1 + r_2$$

پس ✗

حال ثابت می‌کنیم نقطه‌ی P مماس مشترک $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$

$P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$

طبق قضیه می‌دانیم خط مماس بر دوایر $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ بر شعاع آنها عمود است

اما طبق قسمت قبل O_1 و O_2 و P هم‌خط هستند پس $\overleftrightarrow{O_1P} = \overleftrightarrow{O_2P}$ و از یک نقطه روی یک خط (یعنی نقطه‌ی P روی خط $\overleftrightarrow{O_1P} = \overleftrightarrow{O_2P}$) فقط یک خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد پس هر دو دایره در P مماس دارند که همان مماس مشترک آنهاست $\square$