بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

سمینار درس مبانی هندسه (بهار ۹۷)

امیر نیک آبادی

دوران، انتقال و بازتاب [۱]:

در این بخش با استفاده از قضایای بخش قبلی، خانواده ی جدیدی از ایزومتری [۲] ها را تعریف خواهیم کرد. بنابر نتیجه ۱۱.۱.۱۰ هر ایزومتری می تواند به وسیله ترکیب دو یا سه انعکاس [۳] بیان شود. ابتدا ترکیب دو انعکاس را بررسی میکنیم.

دو خط l و m را در نظر بگیرید. در حالتی که $l = m$ باشد، $p_l \circ p_m$ یک انتقال همانی است که قبلا به آن پرداخته ایم اما در حالتی که l و m در یک نقطه اشتراک داشته باشند و حالتی که هردو موازی باشند مورد بحث قرار میگیرند. ابتدا با حالتی شروع می کنیم که l و m با هم اشتراک داشته و بر هم عمود باشند.

نیم چرخش[۴]:

ترکیب دو انعکاس حول دو خط عمود بر هم را **نیم چرخش** گویند. فرض کنید دو خط l و m بر هم عمود باشند و در نقطه ای مانند O با هم اشتراک داشته باشند. یک نیم چرخش حول O را به صورت $h_O = p_l \circ p_m$ تعریف میکنیم.

قضیه نیم چرخش:

فرض کنید دو خط l و m در نقطه O بر هم عمود باشند و $h_O = p_l \circ p_m$ یک نیم چرخش حول O باشند آنگاه :

۱. اگر P هر نقطه ای غیر از O باشد، آنگاه O نقطه میانی[۵] قطاع تشکیل شده از P و $h_O(P)$ می باشد.

۲. اگر n و s هر دو خطی باشند که در O بر هم عموداند آنگاه $p_s \circ p_n = h_O = p_n \circ p_s$

---

[۱] Rotations Translations، and Glide reflections

[۲] Isometry

[۳] Reflection

[۴] Half-Turn

[۵] Mid Point

نتیجه: نقطه O تنها نقطه ثابت[۶] h_O است.

قضیه نیم چرخش تعریف جدیدی از h_O را نیز نشان می دهد. برای نقطه داده شده O می توان h_O را اینگونه تعریف کرد که اگر O نقطه ثابت h_O باشد و اگر P هر نقطه ای غیر از O باشد آنگاه $h_O(P)$ نقطه یکتای P' روی پاره خط PO است به طوری که O نقطه میانی قطاع PP' باشد.
نتیجه دیگری که از قضیه نیم چرخش می توان گرفت این است که h_O تنها توسط O تعریف می شود و مستقل از دو خط l و m است.
نکته: مشاهده می کنیم که تعریف ارائه شده برای نیم چرخش دقیقا همانند تعریف انعکاس در خط l است. به دلیل همین شباهت در تعریف، نیم چرخش را **انعکاس در یک نقطه**[۷] نیز می گویند.

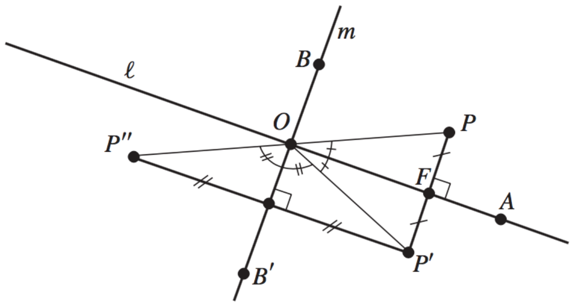
اثبات قضیه نیم چرخش:

فرض کنید $h_O = p_l \circ p_m$ یک نیم چرخش حول O با خطوط عمود بر هم l و m باشد. فرض کنید P نقطه ای غیر از O باشد، تعریف می کنیم $P' = p_l(P)$ و $P'' = p_m(P') = h_O(P)$. اگر P روی خطوط l یا m باشد آنگاه بنابر تعریف نیم چرخش داریم O نقطه میانی خط PP'' است.
پس فرض کنید P روی خطوط l یا m نباشد. در این حالت P باید درون یکی از چهار زاویه قائمه تشکیل شده توسط خطوط l و m قرار بگیرد. نقطه A را روی l و B را روی m در نظر بگیرید، در این صورت P نقطه درونی زاویه $\angle AOB$ است. نقطه B' را روی قطاع روبه روی نیم خط OB در نظر بگیرید. (شکل ۱)

فرض کنید F تقاطع خط عمود از P به خط l باشد، بنابر حالت دو ضلع و زاویه بین[۸] داریم $\triangle POF \cong \triangle P'OF$ پس $\angle POA \cong \angle P'OA$ و $OP = OP'$. به طور مشابه $\angle P'OB' \cong \angle P''OB'$ و $OP' = OP''$. حال از آنجایی که $\mu(\angle P'OB') + \mu(\angle AOP') = 90°$ می توان نوشت $\mu(\angle POP') + \mu(\angle P'OP'') = 180°$ و همینطور نیم خط های OP'' و OP قطاع های روبه روی هم هستند(بنابر قضیه مزدوج خطی)، در نتیجه قسمت اول قضیه را اثبات کرده ایم.
قسمت دوم قضیه بنابر قسمت اول قابل اثبات است زیرا از هیچ ویژگی خطوط l و m استفاده نشده است جز اینکه در نقطه ای مانند O بر هم عمود هستند. □

---

[۶] Fixed Point
[۷] Reflection in a One Point
[۸] SAS



شکل ۱: نیم چرخش حول نقطه O

حال حالتی از ترکیب دو انعکاس را در نظر می گیریم که دو خط در نقطه O با هم اشتراک داشته باشند ولی لزوما بر یکدیگر عمود نباشند.

دوران:

ترکیب دو انعکاس حول دو خطی که با هم اشتراک دارند را دوران می نامیم. در حالتی که دو خط عمود بر هم اند دوران همان نیم چرخش است. زاویه $\angle AOB$ را در نظر بگیرید که l پاره هط AO باشد و خط m نیمساز[۹] زاویه $\angle AOB$. در این حالت ترکیب $p_l \circ p_m$ دوران با مرکز O و زاویه $\angle AOB$ نامیده می شود و با R_{AOB} آن را نشان می دهیم.

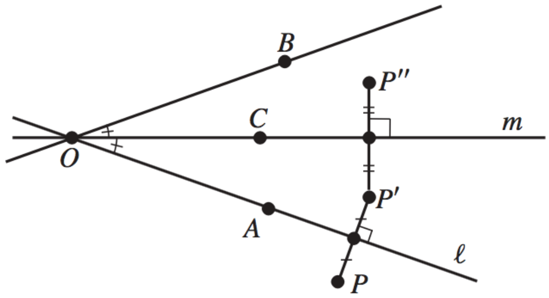
نکته: اگر B روی نیم خط OA باشد آنگاه $m = l$ پس $R_{AOB} = p_m \circ p_l = p_l \circ p_l = I$ وقتی که $\angle AOB$ اندازه صفر داشته باشد. پس تبدیل همانی [۱۰] را می توان به وسیله دوران با زاویه $0°$ و یا نیم چرخش را به صورت دوران با زاویه $180°$ تعریف کرد.

فرض کنید l یک ضلع زاویه و m نیم ساز آن باشند (شگل ۲)، اگر l و m هر خطی باشند که با زاویه غیر از قائمه یکدیگر را قطع کنند آنگاه یکی از دو زاویه ای که درست میکنند اندازه ای کمتر از $90°$ دارند. بنابراین هر دورانی یا یک نیم چرخش است یا برابر است با R_{AOB} برای یک زاویه دلخواهی مانند $\angle AOB$.

---

[۹] Bisector

[۱۰] Identity Transformation



شکل ۲: دوران با مرکز O و زاویه $\angle AOB$

اگر OA' قطاع روبه رویی OA و OB' قطاع روبه رویی OB باشد آنگاه دوران با مرکز O و زاویه $\angle A'OB'$ برابر است با دوران با مرکز O و زاویه $\angle AOB$. پس در تعریف دوران می توان زاویه را با زاویه عمودی جایگزین کرد، ولی نمی توان ترتیب اظلاع زاویه هارا تغییر داد برای مثال R_{AOB} و R_{BOA} دو تبدیل مجزا هستند. به عبارتی $R_{BOA} = R_{AOB}^{-1}$