احسان نجیب‌پور 9535223

۱۰.۲: مدل دیسک پوانکاره برای هندسه هذلولوی:

در باقی مانده‌ی فصل، وجود یک مدل برای هندسه ~~[illegible]~~ اقلیدوسی فرض می‌شود. با استفاده از مدل اقلیدوسی یک هذلولوی می‌سازیم. درک اثبات‌های این بخش نیازمند تفکری عمیق می‌باشد.

ما از ساختارهای پیچیده در هندسه‌ی اقلیدوسی استفاده خواهیم کرد تا چیزهایی درباره‌ی هندسه هذلولوی را اثبات کنیم.

یک راه ساده برای این که کاری که انجام می‌دهیم را درک کنیم فکر کردن به شرایط نقشه‌ها است. ما می‌خواهیم یک نقشه دقیق از فضای هذلولوی بسازیم. (نه نقشه‌ای که معمولاً در اطراف استفاده می‌شود بلکه نقشه ای که در جغرافی کاربرد دارد). ما همگی با نقشه‌ی جهان آشنایی داریم.

سطح زمین تقریباً کروی است ولی نقشه همچنان سطح زمین را روی یک صفحه تخت نمایش می‌دهد. یک نقشه که یک بخش کوچک از سطح زمین نشان می‌دهد می‌تواند خیلی دقیق باشد ولی یک نقشه که کل سطح زمین را نشان دهد باید یک سری از اطلاعات قابل توجه را از بین ببرد. بطور مشابه وقتی نقشه صفحه هذلولوی در صفحه اقلیدوسی کشیده می‌شود به ناچار بخش‌هایی از آن از بین می‌رود. بنابراین شما نباید انتظار داشته باشید که ببینید شکل در صفحه هذلولوی خط‌هایی مستقیم دارد و فاصله‌ها با حالت عادی اندازه گیری شوند.
در عوض ما تفسیر دقیق از همه شرایط تعریف شده ارائه می‌دهیم.

تعبیر:

دایره‌ی γ را در صفحه اقلیدوسی می‌کشیم. برای مثال، ما می‌توانیم از مدل دکارت برای صفحه اقلیدوسی استفاده کنیم و γ دایره متمرکز با شعاع یک است. A نقطه در مدل دیسک پوانکاره یک نقطه اقلیدوسی درون دایره γ است.

شرایط خط در دو حالت مختلف تعبیر می‌شود.

یک نوع خط قطر دایره γ است و با یک خط اقلیدوسی که از مرکز دایره γ می‌گذرد شروع می‌شود

نوع دوم خط پوانکاره دایره‌ی اقلیدوسی 𝔹 که متعامد بر دایره γ است. خط پوانکاره شامل مجموعه‌ی همه‌ی نقاط روی 𝔹 که داخل γ واقع شده‌اند. دو نوع خط در شکل ۱۱.۱ نمایش داده شده اند.

ما در حال حاضر نیم صفحه در مدل دیسک پوانکاره را تفسیر می‌کنیم. m را یک خط در مدل فرض می‌کنیم. اگر m خط از نوع اول باشد با خط l اقلیدوسی تعیین می‌شود که از مرکز γ می‌گذرد. دو نیم صفحه اقلیدوسی وجود دارد که با l تعیین می‌شود. اگر نیم صفحه پوانکاره را m بگیریم به تقاطع نیم صفحه اقلیدوسی با درون γ تعریف می‌شود. در صورتی که m با دایره 𝔹 اقلیدوسی تعین شود ما نیم صفحه m را تقاطع داخل و خارج 𝔹 با داخل γ تعریف می‌کنیم.

ما نباید اندازه زاویه را تا بعد از تعریف فاصله تعریف کنیم. (چون تعریف زاویه نیازمند تعریف شعاع که نیازمند تعریف میانبود که نیازمند تعریف فاصله است.) ما می‌خواهیم اندازه زاویه را تعریف کنیم. برای نقاط که هر دو نوع خط پوانکاره یک تصور طبیعی از میانبود داریم که از هندسه اقلیدوسی گرفته شده است.

فرض کنیم ما دو شعاع پوانکاره با نقاط پایانی A داریم. هر شعاع یک قسمت از دایره اقلیدوسی یا خط است بنابرین ما می‌توانیم زاویه بین آن ها را دقیقاً مثل فصل قبل بدست آوریم. به نوع دیگر دو شعاع پوانکاره دو شعاع مماس اقلیدوسی را تعین می‌کند.

یک مدل مانند این مدل همدیس نامیده می‌شود. از چهار مدل که ساختیم، دو مدل هستند و دو مدل همدیس نیستند. مزیت مدل همدیس این است که شکل که می‌کشیم دقیق توصیف می‌شود. فاصله و خط مستقیم همچنان کاملاً تعریف شده‌اند ولی حداقل اندازه زاویه به درستی نمایش داده می‌شود. برای مثال شکل ۱۱.۳ یک مثلث درون مدل دیسک پوانکاره نمایش می‌دهد. از شکل واضح است که زاویه اندازه کوچک‌تری نسبت به مثلث متناظر اقلیدوسی خود دارد.

آخرین اصطلاح تعریف شده که باید توضیح داده شود فاصله است. فاصله واضح بین نقطه‌ها در مدل نمی‌توانند مانند راه اقلیدوسی معمول توضیح داده شوند. فرض کنید A و B نقاط مجزا در مدل هستند. اگر A و B واقع در شکل 𝔹 باشند، پس از آن P و Q نقاط پایانی شکل تعریف می‌کنیم. اگر A و B در شکل واقع نباشند بین یک دایره‌ی اقلیدوسی یکتای 𝔹 وجود

دارد که شامل دو نقطه عمودی بر ℓ است. فرض کنیم P و Q دو نقطه B که ℓ را تقسیم می‌کند باشند (شکل ۱۱.٤).

اطمینان حاصل کنیم که P و Q نقاط روی ℓ هستند بنابراین نقاط در مدل دیسک پوانکاره هندسه هذلولوی نیستند. (نقاط مدل، نقاط اقلیدوسی که کاملاً درون ℓ قرار دارند) نقاط روی ℓ نقاط آرمانی برای مدل نامیده می‌شوند و می‌توانند بسیار از نقاط عادی مدل دور باشند. نقاط آرمانی در تعریف فاصله برای مدل کاربرد دارند.

۱۱.۲.۱:

فاصله از A تا B را با $d(A,B) = |\ln([AB, PQ])|$

نشان می‌دهیم. به یاد آوریم که $[AB, PQ]$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$[AB, PQ] = \frac{(AP)(BQ)}{(AQ)(BP)}$$

و همچنین:

$$[BA, PQ] = \frac{1}{[AB, PQ]} = [AB, QP]$$

$$d(B,A) = |\ln([BA, PQ])| = |\ln([AB, PQ])| = d(A,B)$$

P و Q ترتیب ندارند و مهم نیست کدام اول و کدام دوم بیایند.

این محاسبات همچنین بطور واضح نیاز به مقدار قطعی در تعریف d نشان می‌دهد.

حالا می‌دانیم که چطور شرایط تعریف شده هندسه هذلولوی را ~~تغ~~ تغییر کنیم. ما می‌توانیم شروع به کشیدن شکل در مدل دیسک پوانکاره کنیم. شکل بعدی (شکل ۱۱.۵) انواع مختلف خط‌های موازی را نشان می‌دهد در حالی که شکل ۱۱.۶ موضوعات گوناگون گفته شده در فصل ۶ را نشان می‌دهد.

ما نشان می‌دهیم که همه اصول هندسه هذلولوی قانع کننده هستند. وجود اصول واضح است و همچنین اصل توازی هذلولوی هم واضح است.

شکل ۱۱.۵ برای توضیح چند خط موازی:

برای نشان دادن وقوع اصل‌ها، با دو نقطه از مدل شروع می‌کنیم. دو نقطه یا در شکل γ واقع می‌شوند یا نمی‌شوند. اگر واقع شوند، شکل یک خط یکتا شامل هر دوی آن‌ها دارد (هیچ خط پوانکاره‌ای از نوع دوم نیست که شامل دو نقطه روی γ باشد زیرا نقطه مرکزی γ خارج از دایره عمود بر γ است). اگر دو نقطه بر شکل γ واقع نباشند، یک خط واحد پوانکاره از نوع دوم وجود دارد که شامل آن‌ها باشد. پس این اصل برقرار است.

برای اثبات اصل خط‌کش، خط پوانکاره m و نقطه‌ی A روی آن‌ها را در نظر می‌گیریم.

طبق بالا، خط پوانکاره m دو نقطه P و Q روی γ تعیین می‌کند.

تعریف می‌کنیم $f(x) = \ln([AX, PQ])$ و $f: m \to \mathbb{R}$. خیلی سخت نیست تشخیص این که f یک تابع مختصات برای m است، f یک به یک است و خواص مورد نیاز در اصل خط‌کش را دارد. خواص تابع لگاریتم می‌تواند برای نمایش $d(B,C) = |f(B) - f(C)|$ استفاده شود. و f از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند.

این حقیقت که یک دایره صفحه اقلیدوسی را به دو قسمت داخلی و خارجی تقسیم می‌کند اثبات اصل جداسازی صفحه داخلی آسان می‌کند. از آن جایی که مدل همریخت است بیشتر قسمت‌های خاص اصل برقرار است.

آخرین اصل دو ضلع زاویه‌ی بین است. اگر l یک خط هذلولوی پوانکاره باشد، یا l قطر γ است یا l قسمتی از دایره اقلیدوسی عمود بر γ است. در هر صورت می‌توانیم یک تقارن هذلولوی وابسته به l پیدا کنیم. در حالت اول، تقارن هذلولوی با تقارن ~~هذلولوی~~ اقلیدوسی برای l یکسان است. به سادگی می‌توان فهمید که تقارن همه اطلاعات هذلولوی مرتبط را حفظ می‌کند

در حالت دوم l یک قسمتی از دایره اقلیدوسی $\mathcal{B}$ است. I را معکوس اقلیدوسی در $\mathcal{B}$ می‌گیریم
اول مشاهده می‌شود که I، l را در خودش به طور برعکس می‌کشد. (قضیه ۱۰.۷.۹)
همچنین I یک انتقال از دیسک پوانکاره تعیین می‌کند برای مشخص‌شدن این انتقال از $\bar{I}$ ما اسمش را
می‌گذاریم. طبق قضیه ۱۰.۷.۱۷ و ۱۰.۷.۱۹ .