سعید ذبی

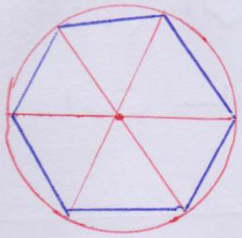
تعریف ۸.۵.۸) اگر $\gamma = C(O,r)$ یک دایره باشد. ناحیه درون دایره عبارت است از تمامی نقاطی مانند X که: $Int(\gamma) = \{X \mid OX < r\}$

ناحیه دایره‌ای مشخص شده توسط γ اجتماع نقاط روی دایره γ و نقاط درونی آن است.

به‌راحتی می‌توان یک چندضلعی مانند $\bar{H}_n$ را درون دایره محاط کرد.

برای هر ضلع از $\bar{H}_n$ یک مثلث وجود دارد که مرکز آن O و دو رأس دیگر آن روی دایره قرار دارد.

پس $\bar{H}_n$ ناحیه‌ای متناظر با n ناحیه مثلثی تعریف می‌شود.



قضیه ۹.۵.۸) برای هر n داریم: $\alpha(\bar{H}_n) < \alpha(S)$ و $\alpha(\bar{H}_n) < \alpha(\bar{H}_{n+1})$

اثبات:

n ضلعی منتظم $\bar{H}_n$ از n مثلث متساوی الساقین که ساق‌های آن شعاع دایره (به طول r) می‌باشد و زاویه بین دو ساق در مثلث برابر $\frac{2\pi}{n}$ است تشکیل شده است.

می‌دانیم که مساحت هر مثلث دلخواه مانند ABC برابر است با: $\frac{1}{2} cb \sin A$

بنابراین مساحت مثلث XOY برابر است با: $\frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$

و از آنجایی که $\bar{H}_n$ از n مثلث تشکیل شده است مساحت آن برابر است با: $\alpha(\bar{H}_n) = n S_{X\hat{O}Y} = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$

می‌خواهیم ثابت کنیم دنباله $\alpha(\bar{H}_n)$ اکیداً صعودی است. از رابطه آن برحسب n مشتق می‌گیریم و اثبات می‌کنیم مشتق آن همواره مثبت است.

$$\frac{1}{2} r^2 \left(\sin \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n^2} \cdot n \cos \frac{2\pi}{n}\right) > 0 \Longleftrightarrow \sin \frac{2\pi}{n} > \frac{2\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} \Longleftrightarrow \tan \frac{2\pi}{n} > \frac{2\pi}{n}$$

(می‌دانیم به ازای هر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، $\sin x < x$ و $\tan x > x$)

$\alpha(\bar{H}_n) = \frac{1}{2} r^2 n \sin \frac{2\pi}{n} < \pi r^2 \Longrightarrow$ دنباله کران‌دار است

با توجه به اینکه دنباله مورد نظر اکیداً صعودی و کران‌دار است پس همگراست و

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(\bar{H}_n) = \sup(\alpha(\bar{H}_n))$$

$$\lim(\alpha(\bar{H}_n)) = \frac{1}{2} r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi \sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{1}{n}\times 2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi) r^2 = \pi r^2 = \sup(\alpha(\bar{H}_n))$$

$$\alpha(R(\gamma)) = \lim_{n\to\infty} \alpha(\bar{H}_n) \quad \rightarrow \quad \alpha(R(\gamma)) = \pi r^2$$

قضیه بالا به ما این اجازه را می دهد که فضای دایره ای را حدی از چندضلعی های محاط شده در آن تعریف کنیم.

تعریف ۱۰.۵.۸) اگر $\gamma = C(O, r)$ باشد و $R(\gamma)$ ناحیه دایره ای مربوط به آن باشد آنگاه مساحت $R(\gamma)$ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\alpha(R(\gamma)) = \lim_{n\to\infty} \alpha(\bar{H}_n)$$

قضیه ۱۱.۵.۸) (قضیه ارشمیدس):

اگر γ دایره ای با شعاع r باشد و c نیز محیط دایره باشد و مساحت دایره را نیز با A نشان دهیم آنگاه داریم:

$$A = \frac{1}{2} r c$$

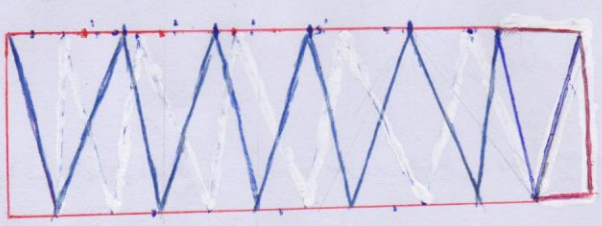
توجه کنید این فرمول اقلیدسی است. در واقع این فرمول تظاهری از واقعیت است که مساحت مثلث های اقلیدسی نصف قاعده ضرب در ارتفاع می باشد. نتیجه زیر سریعاً بدست می آید.

نتیجه ۱۲.۵.۸) اگر γ دایره ای با شعاع r باشد و c محیط و A مساحت آن باشد آنگاه:

$$A = \pi r^2$$

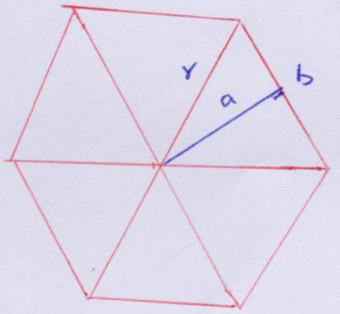
قضیه ارشمیدس به طور مستقیم قابل فهم است. مستطیلی به ابعاد $r \times \frac{1}{2} c$ را در نظر بگیرید. همانطور که در شکل نشان داده شده آنرا به مثلث هایی تقسیم کنید. در شکل یازده مثلث هم‌نهشت جدا از هم قرار دارد. دو مثلث کوچک کنار با یکدیگر مثلث دوازدهم هم نهشت با بقیه را تشکیل می دهند.

این دوازده مثلث می توانند از هم جدا شوند و دوباره کنار هم قرار بگیرند و سطح مثلثی به شعاع r و محیط c را به طور تقریبی بپوشانند. اگر مستطیل به مثلث های بیشتری تقسیم شود آنها می توانند سطح دایره را به طور دقیق تر پوشش دهند.



قبل از اثبات قضیه ارشمیدس چند تعریف و چند مشاهده ساده از آن را بیان می‌کنیم:

تعریف ۱۳.۵.۸) اگر $P_1, P_2, \ldots, P_n$ یک چندضلعی منتظم باشد که درون دایره $C(O, r)$ قرار گرفته آنگاه فاصله بین O (مرکز دایره) تا یکی از اضلاع چندضلعی را ارتفاع می‌نامند.



از آنجایی که چندضلعی منتظم است فاصله O تا تمام اضلاع برابر است. این موضوع از قضیه ۴.۲.۴ (که ارتفاع فاصله عمود بین O و یکی از اضلاع است) پیروی می‌کند.

- اگر $P_1, P_2, \ldots, P_n$ یک چندضلعی باشد که درون دایره $C(O, r)$ با ارتفاع a قرار دارد. می‌توانیم مشاهدات زیر را بیان کنیم:

۱) اگر b اندازه یکی از اضلاع چندضلعی باشد آنگاه:

$$r - \frac{1}{2} b < a < r$$

۲) اگر A مساحت چندضلعی مشخص شده توسط $P_1, P_2, \ldots, P_n$ باشد و l محیط چندضلعی باشد آنگاه:

$$A = \frac{1}{2} a l$$

مشاهده اول از قضیه نامساوی مثلث پیروی می‌کند و مشاهده دوم پیروی می‌کند از فرمول اقلیدسی برای مساحت مثلث و تعریف ارتفاع و محیط. حال ما تمامی عناصر لازم جهت اثبات قضیه ارشمیدس را داریم:

اثبات قضیه ارشمیدس: اگر γ دایره‌ای به شعاع r و c محیط آن باشد. و همچنین اگر A مساحت دایره مورد نظر باشد. و طبق قبل H_n و $\bar{H}_n$ و l_n تشریح می‌کنند چندضلعی توصیف شده را.

طبق تعریف داریم $A = \lim_{n \to \infty} \alpha(\bar{H}_n)$. این موضوع از مشاهده دوم که در بالا ذکر شد پیروی می‌کند. که $\alpha(\bar{H}_n) = \frac{1}{2} a_n l_n$ که a_n ارتفاع چندضلعی H_n می‌باشد. با توجه به مشاهده اول و اینکه $\lim_{n \to \infty} a_n = r$ داریم

$$A = \lim_{n\to\infty} \alpha(\bar{H}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{۲} a_n \ell_n = \frac{1}{۲} (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} \ell_n) = \frac{1}{۲} rC$$

سعید ذبیحی