خانم میرهاشمی

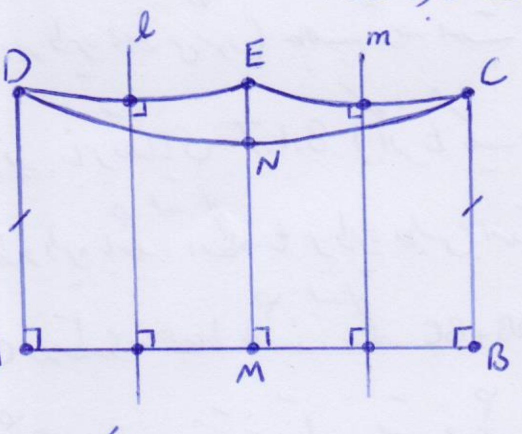
1

قضیه 8.2.6 . اگر اصل توازی اقلیدسی برقرار نباشد، مثلثی وجود دارد که در دایره محاط نمی‌شود.

اثبات. فرض می‌کنیم اصل توازی اقلیدسی برقرار نباشد. آنگاه بنابر قضیه 4.9.1 (اگر خط ℓ با نقطه‌ای خارجی P موجود باشد که حداقل دو خط گذرا بر P و موازی با ℓ وجود داشته باشد، آنگاه برای هر خط ℓ و هر نقطه‌ی خارجی P، حداقل دو خط گذرا بر P و موازی با ℓ خواهیم داشت.) اصل توازی هذلولوی برقرار خواهد بود. بنابراین می‌توان از قضایای هندسه هذلولوی استفاده کرد.

فرض می‌کنیم $\square ABCD$ چهارضلعی ساکری با قاعده $\overline{AB}$ و ضلع بالایی $\overline{CD}$ باشد. M را وسط $\overline{AB}$، و N را وسط $\overline{CD}$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه 6.1.9، که بیان می‌کند طول ارتفاع از طول اضلاع قائم بر قاعده کمتر است، نتیجه می‌شود $MN < AD$. نقطه‌ی E روی $\overleftrightarrow{MN}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $ME = AD = BC$. می‌خواهیم ثابت کنیم $\triangle CDE$ در دایره‌ای محاط نمی‌شود.

بخصوص، نشان خواهیم داد عمودمنصف‌های $\overline{DE}$ و $\overline{CE}$ موازی هستند. پس بنابر قضیه‌ی 8.2.2 (یک مثلث در دایره محاط می‌شود اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های اضلاع متقاطع باشند) نتیجه می‌شود که دایره محیطی برای این مثلث وجود ندارد.



می‌دانیم $\square AMED$ و $\square BMEC$ نیز چهارضلعی‌های ساکری هستند. فرض می‌کنیم ℓ خط گذرا بر نقطه‌ی وسط $\overline{AM}$ و $\overline{DE}$، و m خط گذرا بر نقطه‌ی وسط $\overline{MB}$ و $\overline{CE}$ باشد.

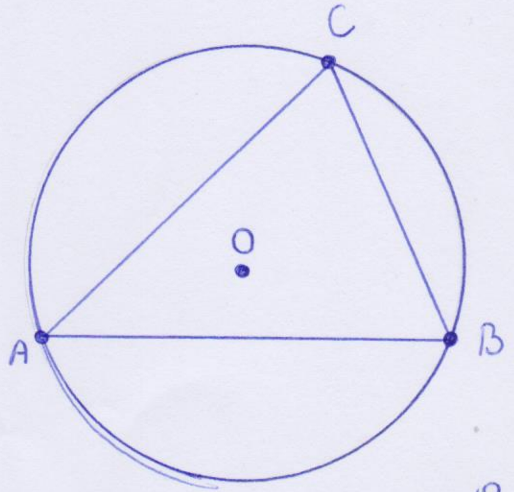
بنابر قضیه 4.8.10 قسمت 3 (در چهارضلعی ساکری $\square ABCD$ با قاعده $\overline{AB}$، پاره خط گذرا بر وسط قاعده $\overline{AB}$ و ضلع بالایی $\overline{CD}$، بر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ عمود است.) $\ell \perp \overleftrightarrow{AB}$ و $m \perp \overleftrightarrow{AB}$

و بنابراین $l \parallel m$. (قضیه زوایای متبادل درونی). همچنین با توجه به قضیه 4.8.10 قسمت 3 که در بالا به آن اشاره شد، $l \perp \overleftrightarrow{DE}$ و $m \perp \overleftrightarrow{CE}$. در نتیجه l، عمود منصف $\overline{DE}$ و m عمود منصف $\overline{CE}$ خواهد بود. پس برای وجود مرکز دایره محیطی، باید عمود منصف‌ها در سه یکدیگر را قطع کنند و چون دوتا از آن‌ها موازی اند، پس دایره محیطی وجود ندارد. □

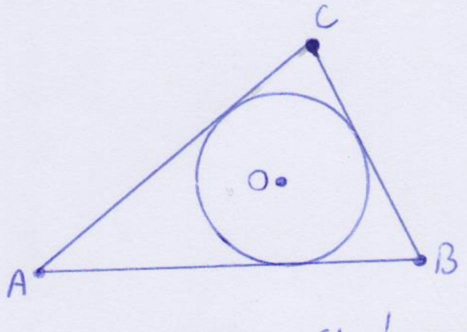
این قضیه ثابت می‌کند که مثلث‌های هذلولوی وجود دارند که در دایره محاط نمی‌شوند. البته بسیاری از مثلث‌ها حتی در هندسه هذلولوی می‌توانند در یک دایره محاط شوند. برای ساختن یکی از آنها، سه نقطه را به عنوان رأس‌های یک مثلث روی دایره‌ای در نظر می‌گیریم و ضلع‌های آن را درون دایره رسم می‌کنیم. این مثلث را محاط در دایره گوییم.

فرض کنیم $\triangle ABC$ یک مثلث باشد. خطوطی که با اضلاع $\triangle ABC$ تعیین می‌شوند همگی خطوط مورب دایره‌ی محیطی هستند. ممکن است این سوال مطرح شود که آیا دایره‌ای وجود دارد که همه اضلاع مثلث بر آن مماس باشند؟ چنین دایره‌ای را دایره محاطی گویند. با توجه به قضیه 8.2.3 (اصل توازی اقلیدس، هم ارز است با این ادعا که هر مثلث، در دایره محاط می‌شود.) جالب توجه است که می‌توان ثابت کرد در هر مثلث، می‌توان دایره‌ای محاط کرد. بنابر قضایای 8.1.7 (اگر t یک خط و $C(O,r)$ یک دایره باشد و P نقطه‌ای منطبق بر خط و دایره باشد، آنگاه t بر دایره مماس است اگر و تنها اگر $\overrightarrow{OP} \perp t$) و 4.3.2 (اگر A و B و C سه نقطه‌ی ناهمخط باشند، آنگاه $AC < AB+BC$)، مرکز دایره‌ی محاطی، محل برخورد نیمسازهای مثلث است و از قضیه قطعه بر نتیجه می‌شود نیمساز زوایا، همرس اند.

تعریف 8.2.7. فرض کنیم ΔABC یک مثلث باشد. دایره $C(O,r)$ را محاطی برای ΔABC گوییم اگر هر پاره خط $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ بر دایره مماس باشند. مرکز دایره محاطی را مرکز مثلث می نامیم.



مثلث ΔABC محاط شده در دایره



دایره‌ی محاطی برای ΔABC