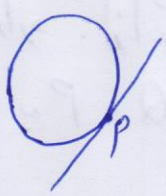
۱ آقای ایش

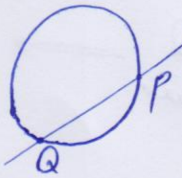
مبانی هندسه

موضوع: دایره و خطّ مماس بر دایره

خطّ مماس بر دایره: خطّی است که دایره را دقیقاً در یک نقطه قطع کند.



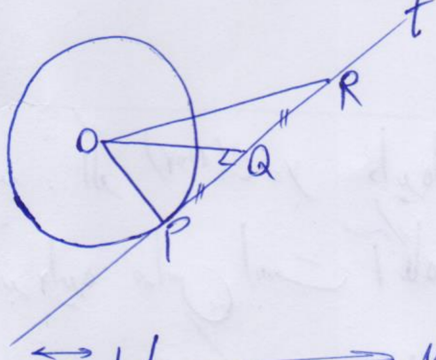
خطّ متقاطع: خطّی است که دایره را در دو نقطه‌ی متمایز قطع کند.



قضیه خطّ مماس: فرض کنید $\gamma = C(O, r)$ دایره‌ای به مرکز O و شعاع r باشد و t خطّی دلخواه و P نقطه‌ای روی $t \cap \gamma$ باشد.

خطّ t در نقطه P بر دایره γ مماس است. $\Longleftrightarrow \overleftrightarrow{OP} \perp t$

اثبات: $(\Leftarrow)$ (فرض خلف): فرض کنید $\overleftrightarrow{OP}$ بر t عمود نباشد. پس نقطه‌ای مثل Q مخالف P روی t وجود دارد که $\overleftrightarrow{OQ} \perp t$. حال نقطه‌ی R را روی t چنان در نظر می‌گیریم که $P*Q*R$ و $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$.



$\overline{PQ} \cong \overline{QR}$

$\overleftrightarrow{OQ} \perp t \Longrightarrow m(\angle OQP) = m(\angle OQR) = 90^\circ$

$\overline{OQ}$ ضلع مشترک

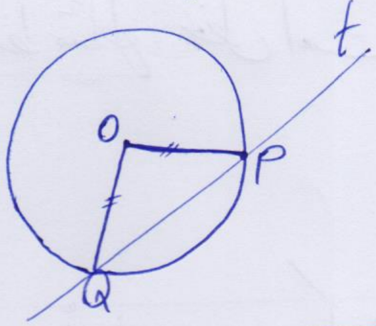
$\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\triangle}{OPQ} \cong \overset{\triangle}{ORQ}$

$\Longrightarrow OR = OP = r$ (شعاع دایره) $\Longrightarrow$ OR شعاع دایره است و R روی دایره قرار دارد. $\Longrightarrow R \in t \cap \gamma$

پس خطّ t دایره را در دو نقطه‌ی متمایز P و R قطع می‌کند و این در تناقض با مماس بودن خطّ t بر دایره γ است.

پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است یعنی $\overleftrightarrow{OP} \perp t$.

$\Longleftarrow$ <u>فرض خلف</u>: فرض کنید t بر دایره مماس نباشد. چون $P \in t \cap \gamma$ است پس خطّ t خارج دایره قرار ندارد. لذا تنها حالت این است که t دایره را در دو نقطه‌ی متمایز P و Q قطع کند.
حال از O به P و Q وصل می کنیم. طبق فرض $\overleftrightarrow{OP} \perp t$. پس $m(\angle OPQ) = 90^\circ$ *



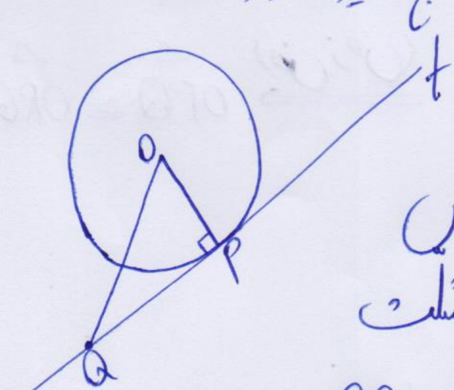
$OP = OQ = r$ (شعاع دایره) $\longrightarrow$ $\overset{\triangle}{OPQ}$ متساوی الساقین $\longrightarrow$ $\angle OQP \cong \angle OPQ$

$\Longrightarrow m(\angle OQP) = m(\angle OPQ) \underset{\text{طبق *}}{=} 90^\circ$

$\Longrightarrow m(\angle OQP) + m(\angle OPQ) = 180^\circ$ ✗

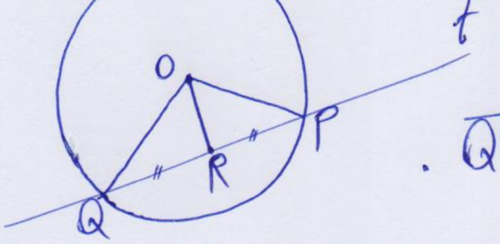
تناقض چون مجموع هر دو زاویه‌ی داخلی مثلث همواره کم‌تر از 180° است درصورتی که در اینجا مجموع دو زاویه‌ی داخلی مساوی 180° می باشد. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است یعنی t در نقطه P بر دایره γ مماس است.

<u>قضیه</u>: اگر $\gamma = C(O, r)$ دایره‌ای به مرکز O و شعاع r باشد و t خطی باشد که در نقطه‌ی P بر دایره مماس است آنگاه هر نقطه‌ی خطّ t به جز P خارج دایره قرار دارد.



<u>اثبات</u>: فرض کنید Q نقطه‌ای دلخواه مخالف P روی خطّ t باشد. از O به P و Q وصل می کنیم. طبق قضیه خطّ مماس $\overleftrightarrow{OP} \perp t$. پس مثلث $\overset{\triangle}{OPQ}$ قائم الزاویه است. امّا در هر مثلث قائم الزاویه وتر از دو ضلع دیگر بزرگتر است، پس $OQ > OP = r$.
در نتیجه فاصله‌ی نقطه‌ی Q از مرکز دایره بیش‌تر از شعاع دایره است و این بدان معناست که Q خارج دایره قرار دارد. □

(۳) **قضیه خطّ متقاطع**: اگر $C(O,r)=\gamma$ دایره‌ای به مرکز O و شعاع r باشد و t خطّی باشد که دایره را در دو نقطه‌ی متمایز P و Q قطع کند آنگاه O روی عمود منصّف پاره خطّ $\overline{PQ}$ قرار دارد.



اثبات: وسط پاره خطّ $\overline{PQ}$ را R می‌نامیم و از O به P و Q و R وصل می‌کنیم. پس $\overline{QR}\cong\overline{RP}$.

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{QR}\cong\overline{RP} & \\ \overline{OP}\cong\overline{OQ} & \text{شعاع دایره} \\ \overline{OR} & \text{ضلع مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\triangle}{ORP}\cong\overset{\triangle}{ORQ} \Longrightarrow \angle ORQ\cong\angle ORP$$

$$\Longrightarrow \boxed{m(\angle ORQ)=m(\angle ORP)}\ (*)$$

امّا دو زاویه‌ی $\angle ORP$ و $\angle ORQ$ یک زوج خطّی هستند. لذا مجموع آنها 180° است.

پس

$$m(\angle ORQ)+m(\angle ORP)=180^\circ \xrightarrow{\text{طبق } (*)} 2m(\angle ORP)=180^\circ$$

$$m(\angle ORP)=90^\circ$$

$$\Longrightarrow \boxed{m(\angle ORQ)=m(\angle ORP)=90^\circ}$$

پس $\overleftrightarrow{OR}\perp t$. لذا $\overleftrightarrow{OR}$ بر پاره خطّ $\overline{PQ}$ عمود است و آن را نصف می‌کند یعنی $\overleftrightarrow{OR}$ عمود منصّف پاره خطّ $\overline{PQ}$ است که O روی آن قرار دارد. □